

УДК 621.391

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-76-88

Вероятности ошибки когерентного приема многопозиционных сигналов в канале с общими гамма- или K -замирениями и белым шумом

Н. В. Савищенко^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0001-5282-2506, snikaspb@mail.ru

Е. В. Лебеда^а, адъюнкт, orcid.org/0000-0002-7919-1086

^аВоенная академия связи им. Маршала Советского Союза С. М. Буденного, Тихорецкий пр., 3, Санкт-Петербург, 194064, РФ

Введение: одной из основных задач теории связи является определение таких характеристик системы передачи информации, как помехоустойчивость (вероятность ошибки) и скорость передачи, знание которых позволяет определить, соответственно, качество и количество переданной информации. Вычисление вероятности ошибки для канала связи, например с замирениями, позволяет оценить потери или выигрыш в помехоустойчивости при использовании в модемах различных сигнальных конструкций. **Цель:** разработка методики расчета вероятности символьной (битовой) ошибки при когерентном приеме сигналов в канале связи с аддитивным белым гауссовым шумом и общими (частотно-неселективными) замирениями, описываемыми гамма-распределением или K -распределением (соответственно их называем гамма-замирением и K -замирением). **Результаты:** получены соотношения, позволяющие рассчитать помехоустойчивость приема для произвольных двумерных сигнальных конструкций для канала связи с гамма- или K -замирениями и аддитивным белым гауссовым шумом. Приведены примеры расчета вероятности символьной ошибки для сигналов фазовой модуляции и квадратурно-амплитудной модуляции. Расчет вероятности ошибки в канале с замирениями для двух различных законов распределения был сведен к одной новой специальной функции, представляющей собой интеграл от произведения функции Трикоми и алгебраической функции. Это позволило разработать универсальный математический подход, справедливый для обоих вариантов замирений. Для вычисления введенной в статье новой специальной функции и ее представления через известные функции использованы как классические гипергеометрические функции, так и обобщенная гипергеометрическая функция двух переменных — функция Кампе де Ферье. **Практическая значимость:** на основе предложенной методики при использовании в перспективных (разрабатываемых) телекоммуникационных стандартах многопозиционных сигнальных конструкций можно получить оценку их потенциальной помехоустойчивости, что позволит объективно сравнивать между собой сигнальные конструкции и корректно выбирать разработчику нового модема лучший вариант.

Ключевые слова — помехоустойчивость, замирения, сигнальные конструкции, символьная вероятность ошибки, битовая вероятность ошибки, сигналы фазовой модуляции, сигналы квадратурно-амплитудной модуляции.

Для цитирования: Савищенко Н. В., Лебеда Е. В. Вероятности ошибки когерентного приема многопозиционных сигналов в канале с общими гамма- или K -замирениями и белым шумом. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 1, с. 76–88. doi:10.31799/1684-8853-2019-1-76-88

For citation: Savischenko N. V., Lebeda E. V. Multi-position signal coherent reception error probability in a channel with generalized gamma or K fading and white noise. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 76–88 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-76-88

Введение

В системах передачи информации часто применяются различные двумерные многопозиционные сигнальные конструкции. Используемые в современных беспроводных системах связи сигналы OFDM (Orthogonal frequency-division multiplexing — мультиплексирование с ортогональным частотным разделением каналов), представляющие собой многомерные сигналы, строятся на основе двумерных сигнальных конструкций. При изучении сигнальных конструкций удобно использовать их классификацию, основанную на расположении сигнальных точек в пространстве. Среди многообразия сигналов можно выделить четыре класса сигналов: сигналы квадратурно-амплитудной модуляции (КАМ) с расположением сигнальных точек в узлах квад-

ратной (целочисленной) решетки (используемая решетка не является плотнейшей, однако обладает реализационными преимуществами); сигналы, построение которых основано на решетках с наибольшей плотностью упаковки в рассматриваемом пространстве, например, в двумерном пространстве это гексагональная плотноупакованная решетка (ГЕКС — гексагональные сигнальные конструкции); сигналы поверхностно-сферической упаковки, когда сигнальные точки расположены на поверхности сферы и к которым относятся сигналы фазовой модуляции (ФМ); сигналы амплитудно-фазовой модуляции с чаще всего регулярным расположением сигнальных точек на концентрических сферах разного радиуса [1–6].

В рамках математической теории связи сигнальные конструкции сравниваются между со-

бой в первую очередь по помехоустойчивости и скорости передачи. В этом случае корректным является их сравнение по энергетическим затратам на передачу одного бита при условии выполнения требуемых значений символьной или битовой вероятностей ошибок. Теоретические основы расчета вероятности ошибки в канале связи с аддитивным белым гауссовым шумом (АБГШ) и при использовании критериев максимального правдоподобия или максимума апостериорной вероятности известны достаточно давно [4–7]. Однако, к сожалению, при практической реализации этих методик встречаются математические сложности, которые на данном этапе позволили получить лишь частные случаи формул для символьной (битовой) вероятности ошибки сигналов КАМ, ФМ и ГЕКС [8–12]. При этом для некоторых вариантов сигнальных конструкций получены лишь аппроксимирующие формулы, которые во многих случаях некорректны в области малых отношений сигнал/шум. Это является существенным недостатком как с точки зрения оценки помехоустойчивости в целом всей сигнально-кодовой конструкции, так и при использовании этих формул, например, в канале связи с АБГШ и общими (частотно-неселективными) замираниями, являющимися следствием многолучевого распространения.

Вероятность ошибки для канала связи с общими замираниями может быть определена по формуле [4–7]

$$P = \int_0^{\infty} P_{e/b}(\gamma_{bc}, \mu) \omega(\mu) d\mu, \quad (1)$$

где $P_{e/b}$ — вероятности символьной или битовой ошибки в канале связи с детерминированными параметрами и АБГШ; μ — случайный коэффициент передачи канала связи, описываемый плотностью распределения вероятностей (п. р. в.). Данная формула может использоваться и при некогерентном приеме сигналов, однако в научной литературе для этого случая, ввиду его математической сложности, имеется мало примеров вычисления вероятности ошибки, в том числе для канала с АБГШ. Кроме того, имеющиеся формулы вероятности ошибки при некогерентном приеме содержат функцию Маркума — принципиально другую специальную функцию, отличную от функции Оуэна, что приводит к совершенно другим подходам при вычислении (1). При определении вероятности ошибки по (1) требуется решение двух взаимосвязанных задач.

Первая задача заключается в вычислении вероятности ошибки в канале связи с детерминированными параметрами и АБГШ при использовании многопозиционных сигнальных конструкций. При этом вычисление по (1) с помощью

некоторых приближительных оценок (например, аддитивной верхней границы [4, 5]) для вероятности ошибки может приводить к существенным погрешностям в вычислении вероятности ошибки для канала с общими замираниями, что может, в свою очередь, привести к неправильным выводам и рекомендациям для разработчиков техники связи. Решение этой задачи для основных классических сигналов, применяемых в канале связи с АБГШ, известно частично из работ [8–15], приведено полностью в работах [16, 17] (т. е. получены точные формулы для символьной и битовой ошибок) как для данных сигнальных конструкций, так и для некоторых других, используемых в современных телекоммуникационных стандартах. В частности, доказано, что вероятность ошибки в канале связи с АБГШ при когерентном приеме представляет собой алгебраическую сумму функций Оуэна, аргументы которой в общем случае будут различны для разных сигнальных конструкций [17–19].

Вторая задача, заключающаяся в выборе закона замираний и непосредственном вычислении (1), также может быть сложной. Выбор п. р. в. должен быть обоснован физически и подтверждаться экспериментальными результатами, обработанными математическими (статистическими) методами. Так, в рамках предположения о гауссовом распределении квадратурных составляющих, основанном на центральной предельной теореме, приходят к известным законам Рэлея, Райса, Хойта и Бекмана (трехпараметрическому закону). Однако только для рэлеевских замираний вычисление (1) может быть аналитически осуществлено после несложных преобразований. Для остальных случаев при аналитическом вычислении интеграла возникают математические сложности. Другой закон — Накагами — выбирается авторами чаще всего именно по причине относительной простоты вычисления (1) с помощью этого закона. Хотя было подтверждено, что закон Накагами можно применять для описания замираний, но многие авторы [20–23 и др.] указывают, что могут быть такие ситуации (каналы связи), когда справедливы и другие законы. Что еще более важно, встречаются ситуации, для которых известные распределения, полученные из гауссовой модели, не являются адекватными экспериментальным данным. Последнее время наблюдается рост публикаций, в которых рассматриваются другие п. р. в., применяемые для описания общих замираний, например, k - μ - и η - μ -распределения [21, 24, 25] или гамма-распределение [26]. Другим распределением, появившимся в публикациях последнего времени [20, 23, 27–30], является K -распределение, применение которого для замираний обосновано в работах [31, 32].

Для вычисления (1) часто применяется метод MGF (Moment generating function) [6] или метод CHF (Characteristic function) [33]. Эти методы формализуют вычисление (1), но по-прежнему требуют фактических формул для вероятностей ошибок.

В данной статье приведена методика расчета символьной (битовой) вероятности ошибки, причем, в отличие от известных работ в этой области, для произвольных двумерных многопозиционных сигнальных конструкций. Рассматривается канал связи с гамма- и K -замираниями и АБГШ при когерентном приеме по критерию максимального правдоподобия или максимума апостериорной вероятности.

Фактически в отдельных случаях некоторые ограничения могут быть сняты. Основное требование — вероятность ошибки должна выражаться через функцию Оуэна. Так, например, вероятность битовой ошибки для многомерной многопозиционной КАМ выражается через функцию Гаусса [17], что позволяет формально использовать данную методику и для этого случая.

Статистика распространения радиоволн

Традиционный подход к изучению математических моделей, учитывающих распространение радиоволн и эффект многолучевости и вытекающих из их явлений случайных замираний коэффициента передачи канала связи, описываемых соответствующими п. р. в., предполагает использование центральной предельной теоремы [4–7]. Это приводит к классической гауссовой модели канала связи, когда квадратурные составляющие сигнала распределены по нормальному (гауссовому) закону. Альтернативный подход к статистике распространения радиоволн подразумевает применение других, в том числе негауссовых, распределений, интерес к которым в последнее время значительно возрос. В данной статье рассматриваются гамма- и K -распределения.

Гамма-распределение. Одной из математических моделей, основанной на негауссовом подходе при описании замираний, является двухпараметрическое гамма-распределение (α, β) [26]

$$f_X^{(\Gamma)}(x) = f_X^{(\Gamma)}(x; \alpha, \beta) = \frac{(1/\beta)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x \geq 0, \alpha, \beta > 0. \quad (2)$$

Для обозначения того, что случайная величина (с. в.) X имеет гамма-распределение с параметрами (α, β) , будем использовать сокращенную запись $G(\alpha, \beta)$. Частными случаями гамма-распределения являются экспоненциальное распределение

$G(1, \beta)$, распределение Эрланга $G(n, \beta)$ и хи-квадрат $G(\nu/2, 2)$. Для с. в. $X \in G(\alpha, \beta)$ начальный момент n -го порядка $m_n = \beta^n \Gamma(\alpha + n) / \Gamma(\alpha)$. В частности, математическое ожидание $m_1 = \alpha\beta$, начальный момент второго порядка $m_2 = \alpha(\alpha + 1)\beta^2$.

K -распределение. Основой для получения другого негауссова распределения является малоизвестный факт о некорректности центральной предельной теоремы в случае, когда число слагаемых является с. в., распределенной, например, по отрицательно биномиальному закону [33]. Тогда приходящий в точку приема сигнал имеет следующий вид:

$$s_r(t) = \sum_{i=1}^n a_j \exp[j(\omega_0 t + \varphi_i)],$$

где число слагаемых n является с. в.

В этом случае приходим к K -распределению [33]

$$f_X^{(K)}(x) = f_X^{(K)}(x; \alpha, \beta) = \frac{4(\alpha/\beta)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha K_{\alpha-1} \left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x \right), \quad x, \alpha, \beta > 0, \quad (3)$$

где $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $\text{Re } z > 0$ — гамма-функция;

$K_\nu(z)$ — функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя 3-го рода), определяемая как [34–38]

$$K_\nu(z) = \frac{\pi [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)]}{2 \sin \nu \pi}, \quad \nu \neq n; \quad K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Функция распределения для K -распределения

$$W(x) = 1 - \frac{2(\alpha/\beta)^{\alpha/2}}{\Gamma(\alpha)} x^\alpha K_\alpha \left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} x \right), \quad x > 0;$$

— математическое ожидание

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi \beta}{\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(\alpha)};$$

— начальный момент второго порядка $m_2 = \beta$;

— начальный момент n -го порядка $m_n =$

$$= \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n/2} (\alpha)_n; \quad \text{здесь } (a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} \quad \text{—}$$

символ Похгаммера;

— дисперсия $D = \sigma^2 = \beta \left[1 - \pi \left((\alpha)_{1/2} \right)^2 / (4\alpha) \right];$

— характеристическая функция

$$\begin{aligned} \varphi_{\xi}(t) &= M e^{it\xi} = \int_0^{\infty} e^{it\xi} P_{\xi}(dx) = \\ &= \frac{i\sqrt{\pi\beta}(4\alpha)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \frac{z}{(\beta t^2 + 4\alpha)^{\alpha+1/2}} + \\ &+ {}_2F_1\left(1, \alpha; \frac{1}{2}; -\frac{\beta t^2}{4\alpha}\right), \end{aligned}$$

где P_{ξ} — распределение с. в. ξ ;

— центральный момент n -го порядка

$$\begin{aligned} \mu_n &= M\left[(\xi - m)^n\right] = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right) \left(\frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{\pi\beta}{\alpha}}\right) (\alpha) \frac{1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{k/2} (\alpha) \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

Можно показать, что среднее геометрическое двух с. в., распределенных по гамма-распределению, имеет K -распределение. Действительно, рассмотрим произведение двух независимых с. в., распределенных по гамма-распределению: $\eta = \xi_1 \xi_2$, где $\xi_1 \in G(\alpha_1, \beta_1)$, $\xi_2 \in G(\alpha_2, \beta_2)$. Из свойств 2.2.1.1 $\mathfrak{M}[e^{-ax}; s] = a^{-s} \Gamma(s)$ и 1.1.2.2

$\mathfrak{M}[x^{\alpha} f(x); s] = F(s + \alpha)$ [34] следует, что

$$\mathfrak{M}\left[f_X^{(\Gamma)}(x; \alpha, \beta)\right](s) = \beta^{s-1} \frac{\Gamma(s + \alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)},$$

где

$$F(s) = \mathfrak{M}[f(x)](s) = \mathfrak{M}[f(x); s] = \int_0^{\infty} x^{s-1} f(x) dx,$$

$$s = \sigma + it$$

— преобразование Меллина [34]. Если $F(s)$ и $G(s)$ — преобразования Меллина функций $f(x)$ и $g(x)$, то

$$\mathfrak{M}\left[\int_0^{\infty} f(\xi) g\left(\frac{x}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}\right](s) = F(s) G(s). \quad (4)$$

Известно, что преобразованию Меллина плотности распределения вероятностей с. в. $\eta = \xi_1 \xi_2$, представляющей собой произведение с. в. ξ_1 и ξ_2 , соответствует произведение преобразований Меллина п. р. в. ξ_1 и ξ_2 (4). Следовательно, п. р. в. случайной величины η может быть определена как обратное преобразование Меллина.

Из свойства 1.1.2.6 [34] получаем, что

$$\mathfrak{M}\left[x^{\alpha} f(ax^{\beta}); s\right] = \frac{1}{|\beta|} a^{-(s+\alpha)/\beta} F\left(\frac{s+\alpha}{\beta}\right).$$

Тогда из 3.14.1.3 [34]

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[K_{\nu}(ax); s] &= \frac{2^{s-2}}{a^s} \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right), \\ &\text{Re } a > 0, \text{ Re } s > |\text{Re } \nu| \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned} f_{\eta}(y) &= \mathfrak{M}^{-1}\left[(\beta_1 \beta_2)^{s-1} \frac{\Gamma(s + \alpha_1 - 1) \Gamma(s + \alpha_2 - 1)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)}; y\right] = \\ &= \frac{(\sqrt{\beta_1 \beta_2})^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} (\sqrt{y})^{\alpha_1 + \alpha_2 - 2} K_{(\alpha_1 - \alpha_2)/2}(2\sqrt{\beta_1 \beta_2} y). \end{aligned}$$

Произведение двух рэлеевских с. в. с параметрами σ_1^2 и σ_2^2 (п. р. в. Рэлея $-f(x) = x e^{-(x^2/2\sigma^2)}/\sigma^2$) имеет K -распределение при $\alpha = 1$, $\beta = 4\sigma_1^2 \sigma_2^2$:

$$f_X^{(K)}(x) = \frac{x}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} K_0\left(\frac{x}{\sigma_1 \sigma_2}\right).$$

Если $\eta = \xi_1 \xi_2$, где $\xi_1 \in G(\alpha_1, 1)$ и $\xi_2 \in G(\alpha_2, 1)$ — независимые с. в., тогда [39, с. 379]

$$f_{\eta}(y) = \frac{2}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} (\sqrt{y})^{\alpha_1 + \alpha_2 - 2} K_{\alpha_1 - \alpha_2}(2\sqrt{y}).$$

Действительно, из 2.2.1.8 [34] следует, что

$$\mathfrak{M}\left[e^{-ax-b/x}; s\right] = 2 \left(\frac{b}{a}\right)^{s/2} K_s(2\sqrt{ab}), \text{ Re } a, \text{ Re } b > 0.$$

Учитывая (4) и преобразование с. в. $\eta = \xi^2$, при котором преобразование п. р. в. осуществляется по $f_{\eta}(y) = 2y f_{\xi}(y^2)$, приходим к требуемому соотношению для K -распределения.

Методика вычисления вероятности ошибки

Основные положения методики для канала связи с общими замираниями и АБГШ описаны в работе [17]. Вероятность ошибок при оптимальном когерентном приеме двумерных многопозиционных сигналов в канале с детерминированными параметрами и АБГШ по правилу максимального правдоподобия представляет собой алгебраическую сумму T -функций Оуэна [17, 18]

$$P_{e/b}(\gamma_{bc}) = \sum_k a_k T(\sqrt{2g_k \gamma_{bc}}, \eta_k), \quad (5)$$

где $\gamma_{bc} = E_{bc}/N_0$ — отношение средней энергии E_{bc} , затрачиваемой на передачу одного бита, к односторонней спектральной плотности мощности шума N_0 ; $T(z, a)$ — специальная интегральная функция Оуэна, определяемая как [17–19, 40]

$$T(z, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^a \frac{1}{1+x^2} e^{-\frac{z^2}{2}(1+x^2)} dx, \quad |\arg a| < \pi. \quad (6)$$

Из свойств T -функции Оуэна следует, в частности, что $Q(x) = 2T(x, +\infty)$, $x > 0$, где $Q(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$ — функция Гаусса [41].

В канале связи с общими замираниями основная цель заключается в вычислении интеграла от функции Оуэна при замираниях, описываемых распределением $f(x)$:

$$J = \int_0^\infty T(ax, \eta) f(x) dx, \quad (7)$$

где $f(x)$ — п. р. в. коэффициента передачи канала μ ; параметр $a = \sqrt{2g\gamma_{bc}/m_2}$; величина g определяется в зависимости от сигнальной конструкции, а значение $m_2 = \int_0^\infty x^2 f(x) dx$ — начальный момент второго порядка с. в. с п. р. в. $f(x)$.

Замирания, описываемые гамма-распределением

Используя (7) и полагая в гамма-распределении $\lambda = 1/\beta$, получаем

$$J_\Gamma = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty T(a\mu, \eta) \mu^{\alpha-1} e^{-\lambda\mu} d\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^\eta \frac{1}{x^2+1} \left[\int_0^\infty \mu^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{a^2}{2}(x^2+1)\mu^2 - \lambda\mu\right) d\mu \right] dx$$

или

$$J_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^\eta \frac{1}{x^2+1} \mathfrak{M}\left[\exp\left(-\frac{a^2}{2}(x^2+1)t^2 - \lambda t\right); \alpha\right] dx.$$

Поскольку из 2.2.1.6 [34] следует, что

$$\mathfrak{M}\left[e^{-at^2-bt}; s\right] = \frac{\Gamma(s)}{(2a)^{s/2}} e^{b^2/(8a)} D_{-s}\left(\frac{b}{\sqrt{2a}}\right), \quad \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} s > 0,$$

где $D_\nu(z) = 2^{\nu/2} e^{-z^2/4} \Psi\left(-\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right)$ — функция параболического цилиндра [35–38], то

$$J_\Gamma = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda^2}{2a^2}\right)^{\alpha/2} \times \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha/2+1}} \Psi\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\lambda^2}{2a^2(x^2+1)}\right) dx, \quad (8)$$

где $\Psi(a; b; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми, определяемая как [36]

$$\Psi(a; b; z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} {}_1F_1(a-b+1; 2-b; z) + \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(a-b+1)} {}_1F_1(a; b; z), \quad b \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \Psi(a; n; z) = \lim_{b \rightarrow n} \Psi(a; b; z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9a)$$

или с использованием интегрального представления

$$\Psi(a; b; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} e^{-zt} dt, \quad (9b)$$

где $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} z > 0$. В (9a) используется вырожденная гипергеометрическая функция Куммера

$${}_1F_1(a; b; z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{z^k}{k!},$$

где $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ — символ Похгаммера.

Замирания, описываемые К-распределением

Для K -распределения из (7) следует, что

$$J_K = \frac{4(\alpha/\beta)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty T(a\mu, \eta) \mu^\alpha K_{\alpha-1}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\mu\right) d\mu = \frac{4(\alpha/\beta)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{x^2+1} \times \left[\int_0^\infty \mu^\alpha \exp\left(-\frac{a^2}{2}(x^2+1)\mu^2\right) K_{\alpha-1}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\mu\right) d\mu \right] dx$$

или

$$J_K = \frac{4(\alpha/\beta)^{\frac{\alpha+1}{2}}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{x^2+1} \mathfrak{M}\left[\exp\left(-\frac{a^2}{2}(x^2+1)t^2\right) \times K_{\alpha-1}\left(2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\mu\right); \alpha+1\right] dx.$$

Поскольку [34, 3.14.3.10]

$$\mathfrak{M}\left[e^{-at^2} K_\nu(bt); s\right] = \frac{a^{(1-s)/2}}{2b} e^{b^2/(8a)} \Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right) W_{(1-s)/2, \nu/2}\left(\frac{b^2}{4a}\right),$$

$\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} \nu|,$

где $W_{\mu\nu}(z) = z^{\nu+1/2} e^{-z/2} \Psi(\nu - \mu + 1/2; 2\nu + 1; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Уиттекера [35–38], то

$$J_K = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\alpha}{\beta a^2}\right)^\alpha \times \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha+1}} \Psi\left(\alpha; \alpha; \frac{2\alpha}{\beta a^2(x^2+1)}\right) dx. \quad (10)$$

Новая специальная функция

Анализ выражений (8) и (10) показывает, что оба соотношения представляют собой частный случай интеграла следующего вида:

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^\alpha}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha+1}} \Psi\left(\alpha; \beta; \frac{z}{x^2+1}\right) dx. \quad (11a)$$

Математическое ожидание функции Оуэна для гамма-распределения принимает вид $L(\alpha/2, 1/2; \eta; \lambda^2/2a^2)$, а для К-распределения — $L(\alpha, \alpha; \eta; 2\alpha/\beta a^2)$. При этом $z = \Delta(g, \alpha)/\gamma_{bc}$, где для гамма-распределения $\Delta(g, \alpha) = \alpha(\alpha+1)/(4g)$, а для К-распределения $\Delta(g, \alpha) = \alpha/g$. Кроме того, следует учесть, что математическому ожиданию функции Гаусса $Q(x)$ соответствует $2L(\alpha, \beta; +\infty; z)$, а $Q^2(x)$ — выражение $2[L(\alpha, \beta; +\infty; z) - L(\alpha, \beta; 1; z)]$.

При $\gamma_{bc} \rightarrow 0$ (обрыв канала), т. е. соответственно при $z \rightarrow \infty$, получаем, что

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^\alpha}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha+1}} \Psi\left(\alpha; \beta; \frac{z}{x^2+1}\right) dx \sim \frac{z^\alpha}{2\pi} \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{z}{x^2+1}\right)^{-\alpha} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\eta \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\operatorname{arctg} \eta}{2\pi},$$

так как $\Psi(\alpha, \beta, z) \sim z^{-\alpha}$ при $z \rightarrow \infty$. Здесь используется общепринятое обозначение $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow a)$,

которое означает, что $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Рассмотрим альтернативные представления (11a). Легко показать, что возможен следующий вариант записи (11a):

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{1}{2\pi z} \int_0^\eta \left(\frac{z}{x^2+1}\right)^{\alpha+1} \Psi\left(\alpha; \beta; \frac{z}{x^2+1}\right) dx. \quad (11б)$$

Для численных расчетов, может быть, удобнее применять формулу

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^{\alpha-\beta+1}}{2\pi} \times \int_0^\eta \frac{1}{(x^2+1)^{\alpha-\beta+2}} \Psi\left(\alpha-\beta+1; 2-\beta; \frac{z}{x^2+1}\right) dx, \quad (11в)$$

основанную на тождестве $\Psi(a; b; z) = z^{1-b} \Psi(a-b+1; 2-b; z)$ [36].

Пусть $x^2+1 = 1/t$, тогда из (11a) следует, что

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^\alpha}{4\pi} \int_\Lambda^1 t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt, \quad (12a)$$

где $\Lambda = 1/(\eta^2+1)$. Преобразуем (12a):

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^\alpha}{4\pi} \left(\int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt - \int_0^\Lambda t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt \right) = \frac{z^\alpha}{4\pi} \left(\int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt - \Lambda^{\alpha+1/2} \int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-\Lambda t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; z\Lambda t) dt \right) = \frac{z^\alpha}{4\pi} (I_1 - \Lambda^{\alpha+1/2} I_2). \quad (12б)$$

Первый интеграл представляет собой преобразование Меллина [34, 3.29.1.2]

$$\mathfrak{M}\left[(\sigma-t)_+^{\mu-1} \Psi(a; b; \omega t); s\right] = \int_0^\sigma t^{s-1} (\sigma-t)^{\mu-1} \Psi(a; b; \omega t) dt = \frac{\sigma^{s-b+\mu}}{\omega^{b-1}} \times \Gamma\left[\begin{matrix} b-1 \\ a \end{matrix}\right] \mathbf{B}(\mu, s-b+1) {}_2F_2\left(\begin{matrix} a-b+1, s-b+1; \sigma\omega \\ 2-b, s-b+\mu+1 \end{matrix}\right) + \sigma^{s+\mu-1} \Gamma\left[\begin{matrix} 1-b \\ a-b+1 \end{matrix}\right] \mathbf{B}(\mu, s) {}_2F_2\left(\begin{matrix} a, s; \sigma\omega \\ b, s+\mu \end{matrix}\right),$$

где $\sigma, \operatorname{Re} \mu > 0; \operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re} b - 1$; запись $\operatorname{Re} s > a, b$ означает $\operatorname{Re} s > \max(a, b)$ и

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p; z \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k (b_2)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}$$

— обобщенная гипергеометрическая функция [36, 37]. В формуле преобразования Меллина используется также бета-функция, определяемая как

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Тогда $\sigma = 1, \mu = 1/2, a = \alpha, b = \beta, \omega = z, s = \alpha + 1/2$, следовательно:

$$I_1 = \int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt = \frac{1}{z^{\beta-1}} \Gamma\left[\begin{matrix} \beta-1 \\ \alpha \end{matrix}\right] \times \\ \times B\left(\frac{1}{2}, \alpha - \beta + \frac{3}{2}\right) {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha - \beta + 1, \alpha - \beta + 3/2; z \\ 2 - \beta, \alpha - \beta + 2 \end{matrix}\right) + \\ + \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \beta \\ \alpha - \beta + 1 \end{matrix}\right] B\left(\frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}\right) {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha, \alpha + 1/2; z \\ \beta, \alpha + 1 \end{matrix}\right)$$

или

$$I_1 = \int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; zt) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{z^{\beta-1}} \times \\ \times \Gamma\left[\begin{matrix} \beta-1, \alpha - \beta + 3/2 \\ \alpha, \alpha - \beta + 2 \end{matrix}\right] {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha - \beta + 1, \alpha - \beta + 3/2; z \\ 2 - \beta, \alpha - \beta + 2 \end{matrix}\right) + \\ + \sqrt{\pi} \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \beta, \alpha + 1/2 \\ \alpha - \beta + 1, \alpha + 1 \end{matrix}\right] {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha, \alpha + 1/2; z \\ \beta, \alpha + 1 \end{matrix}\right).$$

Рассмотрим второй интеграл

$$I_2 = \int_0^1 t^{\alpha-1/2} (1-\Lambda t)^{-1/2} \Psi(\alpha; \beta; z\Lambda t) dt = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k}{k!} \Lambda^k \int_0^1 t^{k+\alpha-1/2} \Psi(\alpha; \beta; z\Lambda t) dt.$$

Воспользовавшись определением функции Трикоми (9а), искомый интеграл можно свести к интегралам вида

$$\int_0^1 t^{c-1} {}_1F_1(a; b; \omega t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m}{(b)_m (c+m)} \frac{\omega^m}{m!} = \\ = \frac{1}{c} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (c)_m}{(b)_m (c+1)_m} \frac{\omega^m}{m!} = \frac{1}{c} {}_2F_2\left(\begin{matrix} a, c; \omega \\ b, c+1 \end{matrix}\right).$$

Здесь учтено, что $a + n = a(a+1)_n / (a)_n$, $(a)_{n+k} = (a)_n (a+n)_k$. Тогда

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/2)_k}{k!} \Lambda^k \int_0^1 t^{k+\alpha-1/2} \times \\ \times \left[\frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\beta} \Lambda^{1-\beta} t^{1-\beta} {}_1F_1(\alpha - \beta + 1; 2 - \beta; z\Lambda t) + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} {}_1F_1(\alpha; \beta; z\Lambda t) \right] dt$$

или

$$I_2 = \frac{1}{\alpha - \beta + 3/2} \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} (z\Lambda)^{1-\beta} \times \\ \times {}_F_{1;0;1}^{1;1;1}\left[\begin{matrix} \alpha - \beta + 3/2; 1/2; \alpha - \beta + 1; \\ \alpha - \beta + 5/2; -; 2 - \beta; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda\right] + \\ + \frac{1}{\alpha + 1/2} \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha - \beta + 1)} {}_F_{1;0;1}^{1;1;1}\left[\begin{matrix} \alpha + 1/2; 1/2; \alpha; \\ \alpha + 3/2; -; \beta; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda\right],$$

где введена функция Кампе де Ферье, определяемая как [42, 43]

$$F_{l;m;n}^{p;q;k}\left[\begin{matrix} (a_p); (b_q); (c_k); \\ (\alpha_l); (\beta_m); (\gamma_n); \end{matrix} x, y\right] = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (a_j)_{r+s}}{\prod_{j=1}^l (\alpha_j)_{r+s}} \frac{\prod_{j=1}^q (b_j)_r}{\prod_{j=1}^m (\beta_j)_r} \frac{\prod_{j=1}^k (c_j)_s}{\prod_{j=1}^n (\gamma_j)_n} \frac{x^r y^s}{r! s!},$$

причем для сходимости ряда в правой части должно быть выполнено одно из следующих условий:

- 1) $p + q < l + m + 1, p + k < l + n + 1, |x| < \infty, |y| < \infty$;
- 2) $p + q = l + m + 1, p + k = l + n + 1$ и

$$\begin{cases} |x|^{1/(p-l)} + |y|^{1/(p-l)} < 1, & \text{если } p > l; \\ \max\{|x|, |y|\} < 1, & \text{если } p \leq l. \end{cases}$$

В итоге

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) = \frac{z^\alpha}{4\pi} (I_1 - \Lambda^{\alpha+1/2} I_2) = \frac{z^\alpha}{4\pi} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{z^{\beta-1}} \times \right. \\ \times \Gamma\left[\begin{matrix} \beta-1, \alpha - \beta + 3/2 \\ \alpha, \alpha - \beta + 2 \end{matrix}\right] {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha - \beta + 1, \alpha - \beta + 3/2; z \\ 2 - \beta, \alpha - \beta + 2 \end{matrix}\right) + \\ + \sqrt{\pi} \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \beta, \alpha + 1/2 \\ \alpha - \beta + 1, \alpha + 1 \end{matrix}\right] {}_2F_2\left(\begin{matrix} \alpha, \alpha + 1/2; z \\ \beta, \alpha + 1 \end{matrix}\right) - \\ - \Lambda^{\alpha+1/2} \left(\frac{1}{\alpha - \beta + 3/2} \frac{\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\alpha)} (z\Lambda)^{1-\beta} \times \right. \\ \left. \times {}_F_{1;0;1}^{1;1;1}\left[\begin{matrix} \alpha - \beta + 3/2; 1/2; \alpha - \beta + 1; \\ \alpha - \beta + 5/2; -; 2 - \beta; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda\right] + \right.$$

$$+ \frac{1}{\alpha + 1/2} \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} F_{1;0;1}^{1;1;1} \left[\begin{matrix} \alpha + 1/2; 1/2; \alpha; \\ \alpha + 3/2; -; \beta; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda \right] \Bigg) \Bigg) .$$

В частности, для гамма-распределения

$$L\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}; \eta; z\right) = \frac{z^{\alpha/2}}{4} \times \\ \times \left(-2\sqrt{z}\Gamma \left[\begin{matrix} (\alpha+2)/2 \\ \alpha/2, (\alpha+3)/2 \end{matrix} \right] {}_2F_2 \left(\begin{matrix} (\alpha+1)/2, (\alpha+2)/2; z \\ 3/2, (\alpha+3)/2 \end{matrix} \right) + \right. \\ \left. + \Gamma^{-1} \left(\frac{\alpha+2}{2} \right) {}_2F_2 \left(\begin{matrix} \alpha/2, (\alpha+1)/2; z \\ 1/2, (\alpha+2)/2 \end{matrix} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\Lambda^{(\alpha+1)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\alpha+2} \Gamma^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sqrt{z\Lambda} F_{1;0;1}^{1;1;1} \left[\begin{matrix} (\alpha+2)/2; 1/2; (\alpha+1)/2; \\ (\alpha+4)/2; -; 3/2; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\alpha+1} \Gamma^{-1} \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) F_{1;0;1}^{1;1;1} \left[\begin{matrix} (\alpha+1)/2; 1/2; \alpha/2; \\ (\alpha+3)/2; -; 1/2; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda \right] \right) \Bigg) \Bigg) .$$

Отсюда следует, что для гамма-распределения при $\alpha = 1$ получим частный случай K -распределения: $L(1/2, 1/2; \eta; z)$.

При $\alpha = \beta$, т. е. для K -распределения

$$L(\alpha, \alpha; \eta; z) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} z^\alpha e^z \times \\ \times \Gamma \left[\begin{matrix} 1-\alpha, \alpha+1/2 \\ \alpha+1 \end{matrix} \right] {}_1F_1 \left(\begin{matrix} 1/2; -z \\ 1+\alpha \end{matrix} \right) - \frac{1}{4} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} 1/2; z \\ 1-\alpha \end{matrix} \right) - \\ - \frac{\sqrt{\Lambda}}{4\pi} \left(\frac{2}{3(\alpha-1)} z\Lambda F_{1;0;1}^{1;1;1} \left[\begin{matrix} 3/2; 1/2; 1; \\ 5/2; -; 2-\alpha; \end{matrix} \Lambda, z\Lambda \right] + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha+1/2} (z\Lambda)^\alpha \Phi \left(\alpha + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \alpha + \frac{3}{2}; \Lambda, z\Lambda \right) \right) + \frac{1}{4},$$

где $\Phi(a, b; c; w, z)$ — вырожденная функция Аппеля двух переменных [35–38]:

$$\Phi(a, b; c; w, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+m} (b)_k w^k z^m}{(c)_{k+m} k! m!}, |w| < 1.$$

При преобразованиях учтено, что справедливы тождества [36]

$${}_2F_2 \left(\begin{matrix} 1, a; z \\ 2, b \end{matrix} \right) = \frac{b}{az} \left[{}_1F_1 \left(\begin{matrix} a; z \\ b \end{matrix} \right) - 1 \right], a \neq 1; \\ {}_1F_1 \left(\begin{matrix} a; z \\ b \end{matrix} \right) = e^z {}_1F_1 \left(\begin{matrix} b-a; -z \\ b \end{matrix} \right).$$

Свойства L -функции. Используя соотношения для функции Трикоми при частных значениях ее параметров, нетрудно получить формулы

$$L(\alpha, \alpha + n; \eta; z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-k-1} (\alpha)_k z^{-k} J_k;$$

$$L(\beta - n, \beta; \eta; z) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-k-1} (\beta - n)_k z^{-k} J_k,$$

где

$$J_k = \int_{\Lambda}^1 t^{-k-1/2} (1-t)^{-1/2} dt = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(1/2)_m}{(m-k+1/2)m!} (1-\Lambda^{m-k+1/2}) = \\ = \frac{1}{1/2-k} \left[{}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, 1/2-k, 3/2-k, 1 \\ 2, 2 \end{matrix} \right) - \right. \\ \left. - \Lambda^{1/2-k} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, 1/2-k, 3/2-k, \Lambda \end{matrix} \right) \right], k = 0, 1, \dots$$

Применяя асимптотику [36]

$$\Psi(a, b, z) \sim z^{-a} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (a)_k (a-b+1)_k}{k!} z^{-k} + \\ + O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), z \rightarrow \infty,$$

получаем также, что

$$L(\alpha, \beta; \eta; z) \sim \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\alpha)_k (\alpha-\beta+1)_k}{k!} \times \\ \times z^{-k} J_k + O\left(\frac{1}{z^{n-\alpha+1}}\right), z \rightarrow \infty.$$

Примеры расчета вероятности ошибки

Сигналы ФМ-М. Вероятность символьной ошибки для ФМ-М при когерентном приеме в канале с детерминированными параметрами и АБГШ [17]

$$P_{e1}(\gamma_{bc}) = Q\left(\sqrt{2\gamma_{bc}} \sin \frac{\pi}{M}\right) + 2T\left(\sqrt{2\gamma_{bc}} \sin \frac{\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{\pi}{M}\right).$$

Для расчета вероятности битовой ошибки ФМ-М, $M = 2^K$ при коде отображения Грея справедливы следующие формулы [17]:

$$P_{b1}(\gamma_{bc}) = P_{b2}(\gamma_{bc}) = \frac{4}{M} \sum_{i=1}^{M/4} Q\left(\sqrt{2\gamma_{bc}} \sin \frac{(2i-1)\pi}{M}\right)$$

для первых двух бит и для бит $i \geq 3$

$$P_{bi}(\gamma_{bc}) = \frac{2^{i+1}}{M} \sum_{j=1}^{M/4} (-1)^{\operatorname{ent}\left[\frac{j-1}{2^{k+1-i}}\right]} \times$$

$$\times T\left(\sqrt{2\gamma_{bc}} \sin \frac{(2j-1)\pi}{M}, \operatorname{ctg} \frac{(2j-1)\pi}{M}\right).$$

Используя свойства функции Оуэна, нетрудно показать, что справедливы следующие верхние и нижние границы ($i \geq 3$): $\frac{2^i}{M} Q_1 \leq P_{bi} \leq 2^{i-2} P_{b1}$, где $Q_m = Q\left(\sqrt{2\gamma_{bc}} \sin \frac{m\pi}{M}\right)$. Для средней вероятности битовой ошибки имеем

$$\frac{1}{k} P_e \leq \frac{2}{k} Q_1 \leq P_b = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k P_{bi} \leq \frac{M}{2k} P_{b1}.$$

Сигналы КАМ-MIL-16 (стандарт MIL-STD-188-110B). Вероятность символьной ошибки для КАМ-16, образуемой объединением двух сигналов ФМ (внутренней ФМ-4 и внешней ФМ-12) и используемой в стандарте MIL-STD-188-110B, в канале с детерминированными параметрами и АБГШ при оптимальном когерентном приеме по правилу максимального правдоподобия равна [17]

$$P_e(\gamma_{bc}) = \sum_{k=1}^8 a_k T\left(\sqrt{4b_k \Pi_c^2 \gamma_{bc}}, c_k\right) + Q\left(\sqrt{4\lambda \Pi_c^2 \gamma_{bc}}\right) - \frac{1}{4} Q^2\left(\sqrt{4\lambda \Pi_c^2 \gamma_{bc}}\right),$$

где коэффициенты определены в табл. 1. При этом

$$\rho = 1 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = 0,308168;$$

$$k = 1 - \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4} = 0,213434;$$

$$\lambda = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,133974;$$

$$\operatorname{tg} \xi = 4 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3} = 8,560478;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{6} + \sqrt{2} - 1 = 2,863703;$$

$$\operatorname{tg} \psi = 4 + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1,468746;$$

$$\begin{aligned} \sin \chi &= \frac{2 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{8\sqrt{\rho k}} = \\ &= \frac{2 + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{2\sqrt{17 + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - 4\sqrt{6}}} = 0,654899. \end{aligned}$$

Максимальная и средняя энергии определяются как

$$E_m = \frac{d^2}{2 - \sqrt{3}}; \quad E_c = \frac{1 - \sqrt{3}/8}{2 - \sqrt{3}} d^2,$$

где d — минимальное евклидово расстояние сигнальной конструкции. Соответственно, квадрат пик-фактора $\Pi_c^2 = 8(8 - \sqrt{3})^{-1} = 1,276335$.

В канале с замираниями (гамма-распределение и K -распределение)

$$P_e(\gamma_{bc}) = \sum_{k=1}^8 a_k V(\alpha, \beta, c_k, z_k) + \frac{3}{2} V(\alpha, \beta, +\infty, z_0) + \frac{1}{2} V(\alpha, \beta, 1, z_0),$$

где $z_k = \Delta(g_k, \alpha)/\gamma_{bc}$; $g_0 = 2\lambda \Pi_c^2$; $g_k = 2b_k \Pi_c^2$, $k = 1, \dots, 8$; $\Delta(g, \alpha) = \alpha(\alpha + 1)/(4g)$ — для гамма-распределения; $\Delta(g, \alpha) = \alpha/g$ — для K -распределения.

На рисунке, а-в и в табл. 2 представлены результаты расчета вероятности символьной ошибки для ФМ-16, КАМ-16 и КАМ-MIL-16.

В работе [17] приведены другие формулы (например, для КАМ-М) для расчета вероятности ошибки приема в канале связи с АБГШ различных сигнальных конструкций, на основе кото-

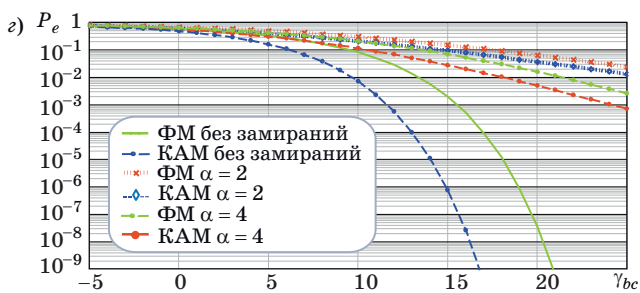
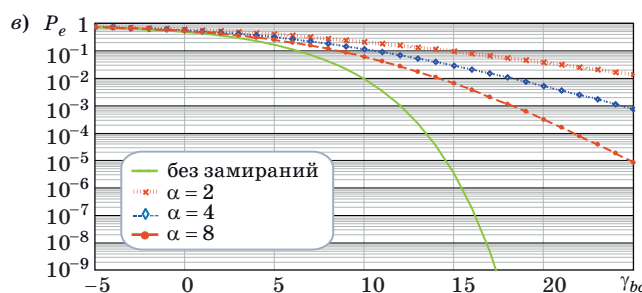
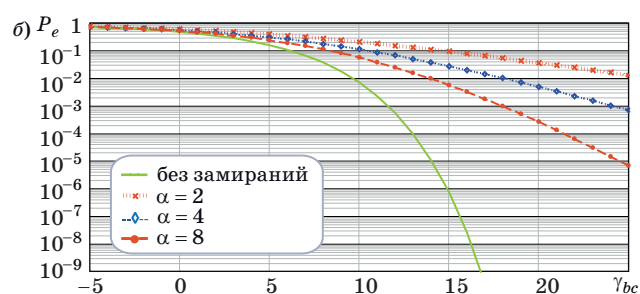
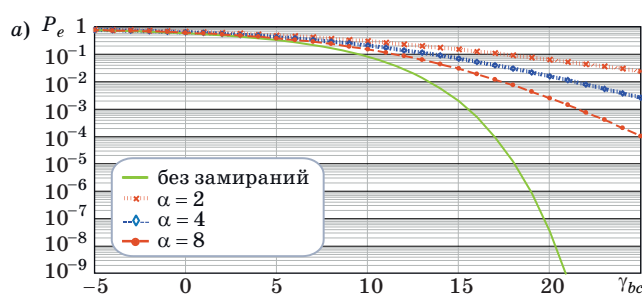
■ Таблица 1. Коэффициенты для вычисления вероятности символьной ошибки для КАМ-16
 ■ Table 1. Coefficients to calculate probability of symbol error rate for QAM-16

k	a_k	b_k	c_k	k	a_k	b_k	c_k
1	1	ρ	$\operatorname{ctg} \xi$	5	1/2	λ	$\operatorname{ctg} \chi$
2	1	ρ	$\operatorname{ctg} \varphi$	6	-1/2	λ	$\operatorname{ctg}(2\varphi)$
3	1	κ	$\operatorname{ctg} \psi$	7	-1/2	λ	$\operatorname{ctg}(\xi + \psi)$
4	1	κ	$\operatorname{tg}(\xi - \pi/3)$	8	1/2	λ	$\operatorname{ctg}(2\xi - 2\pi/3)$

■ **Таблица 2.** Результаты расчетов отношения сигнал/шум, дБ, при заданной вероятности символьной ошибки $\beta = 1/2$, $P_e = 10^{-3}$

■ **Table 2.** The results of calculations of the signal/noise ratio, dB, at a given probability of symbolic error $\beta = 1/2$, $P_e = 10^{-3}$

Сигнал	Без замираний	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 8$
ФМ-16	15,509694	39,718196	27,441325	21,538867
КАМ-16	11,605993	36,670103	24,083075	17,951303
КАМ-MIL-16	12,006422	36,818286	24,270026	18,193576



■ Символьная вероятность ошибок в зависимости от γ_{bc} при $\beta = 1/2$ для ФМ-16 (а); КАМ-16 (б); КАМ-MIL-16 (в) и для ФМ-16 и КАМ-16 в сравнении (г)

■ Symbolic error probability depending on γ_{bc} at $\beta = 1/2$ for FM-16 (a); QAM-16 (б); QAM-MIL-16 (в) and FM-16 and QAM-16 in comparison (г)

рых, используя предложенную методику, можно получить формулы для вычисления вероятностей ошибок в канале с общими замираниями, описываемыми гамма- и К-распределением.

Заключение

В статье проведен анализ помехоустойчивости при передаче цифровой информации по каналам связи с общими (частотно-неселективными) замираниями и АБГШ при распределении коэффициента передачи канала, описываемого гамма- и К-распределением. Авторами приведены точные формулы вероятностей символьной (битовой) ошибок для многопозиционных сигналов, применяемых в современных телекоммуникационных

стандартах, функционирующие во всем диапазоне изменения значений отношения сигнал/шум. Результаты, приведенные в статье, позволяют разработчику модемов получать оценку потенциальной помехоустойчивости для многопозиционных сигнальных конструкций, используемых в телекоммуникационных стандартах, объективно сравнивать их между собой и выбирать наилучшие варианты.

Литература

1. Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 1. *Информационно-*

- управляющие системы, 2018, № 4, с. 86–104. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-86-104
2. **Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.** Evolution of multi-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 2. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 5, с. 94–103. doi:10.31799/1684-8853-2018-5-94-103
 3. **Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh.** Evolution of multi-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 3. *Информационно-управляющие системы*, 2018, № 6, с. 82–94. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-82-94
 4. **Sklar B.** *Digital communications: fundamentals and applications*. Pearson education limited. Williams, 2003. Pp. 961–1029.
 5. **Proakis J. G.** *Digital communications*. 4 ed. New York, McGraw-Hill, 2001. Pp. 257–284.
 6. **Simon M. K., Alouini M.-S.** *Digital communications over fading channels: a unified approach to performance analysis*. New York, Wiley, 2005. Pp. 521–603.
 7. **Goldsmith A.** *Wireless communications*. Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 2005. Pp. 180–188.
 8. **Abdelaziz M., Gulliver T. A.** Triangular constellations for adaptive modulation. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 2, pp. 756–766.
 9. **Rugini L.** Symbol error probability of hexagonal QAM. *IEEE Commun. Lett.*, 2016, vol. 20, no. 8, pp. 1523–1526.
 10. **Lassing J., Strom E., Agrell E., Ottosson T.** Computation of the exact bit-error rate of coherent M -ary PSK with Gray code bit mapping. *IEEE Trans. Commun.*, 2003, vol. 51, pp. 1758–1760.
 11. **Vitthaladevuni P. K., Alouini M.-S.** Exact BER computation of generalized hierarchical PSK constellations. *IEEE Trans. Commun.*, 2003, vol. 51, pp. 2030–2037.
 12. **Vitthaladevuni P. K., Alouini M.-S.** A closed-form expression for the exact BER of generalized PAM and QAM constellations. *IEEE Trans. Commun.*, 2004, vol. 52, pp. 698–700.
 13. **Tang X. Y., Alouini M.-S., Goldsmith A. J.** Effect of channel estimation error on M -QAM BER performance in Rayleigh fading. *IEEE Trans. Commun.*, 1999, vol. 47, pp. 1856–1864.
 14. **Goldsmith A. J., Chua S.-G.** Adaptive coded modulation for fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 1998, vol. 46, no. 5, pp. 595–602.
 15. **Simon M. K.** *Probability distributions involving gaussian random: a handbook for engineers and scientists*. New York, Springer, 2006. Pp. 131–138.
 16. **Chiani M., Dardari D., Simon M. K.** New exponential bounds and approximations for the computation of error probability in fading channels. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2003, vol. 2, no. 4, pp. 840–845.
 17. **Savischenko N. V.** *Special integral functions used in wireless communications theory*. Singapore, World Scientific, 2014. Pp. 183–245.
 18. **Brychkov Yu. A., Savischenko N. V.** A special function of communication theory. *Integral Transforms and Special Functions*, 2015, vol. 26(6), pp. 470–484.
 19. **Brychkov Yu. A., Savischenko N. V.** Some properties of the Owen T -function. *Integral Transforms and Special Functions*, 2016, vol. 27(2), pp. 163–180.
 20. **Trigui I., Affes S., Liang B.** Unified stochastic geometry modeling and analysis of cellular networks in LOS/NLOS and shadowed fading. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 12, pp. 5470–5486.
 21. **Paris J. F.** Statistical characterization of κ - μ shadowed fading. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 2014, vol. 63, no. 2, pp. 518–526.
 22. **Pena-Martin J. P., Romero-Jerez J. M., Lopez-Martinez F. J.** Generalized MGF of Beckmann fading with applications to wireless communications performance analysis. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 9, pp. 3933–3943.
 23. **Bithas P. S., Kanatas A. G., Da Costa D. B., Upadhyay P. K., Dias U. S.** On the double-generalized gamma statistics and their application to the performance analysis of V2V communications. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 1, pp. 448–460.
 24. **Ganahe L., Sharma P. K., Varshney N., Tsiftsis T. A., Kumar P.** An improved energy detector for mobile cognitive users over generalized fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 2, pp. 534–545.
 25. **Yacoub M. D.** The κ - μ distribution and the η - μ distribution. *IEEE Antennas Propag. Mag.*, 2007, vol. 49, no. 1, pp. 68–81.
 26. **Головин О. В., Простов С. П.** *Системы и устройства коротковолновой радиосвязи*. М., Горячая линия-Телеком, 2006. С. 147–156.
 27. **Ben Issaid C., Ben Rached N., Kammoun A., Alouini M. S., Tempone R.** On the efficient simulation of the distribution of the sum of gamma-gamma varieties with applications to the outage probability evaluation over fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 4, pp. 1839–1848.
 28. **Bithas P. S., Rontogiannidis A. A.** Mobile communication systems in presence of fading/shadowing, noise and interference. *IEEE Trans. Commun.*, 2015, vol. 63, no. 3, pp. 724–737.
 29. **Bithas P. S., Sagias N. C., Mathiopoulos P. T., Karagiannidis G. K., Rontogiannidis A. A.** On the performance analysis of digital communications over generalized- K fading channels. *IEEE Commun. Lett.*, 2006, vol. 10, no. 5, pp. 353–355.
 30. **Samimi H.** Distribution of the sum of K -distributed random variables and applications in free-space optical communications. *IET Optoelectronics*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 1–6.
 31. **Илюшин Я. А.** *Модели флуктуирующих каналов распространения радиоволн*. М., МГУ, 2009. С. 132–141.
 32. **Chatzidiamantis N. D., Karagiannidis G. K.** On the distribution of the sum of gamma-gamma variates

- and applications in RF and optical wireless communications. *IEEE Trans. Commun.*, 2011, vol. 59, no. 5, pp. 1298–1308.
33. Annamalai A., Tellambura C., Bhargava V. K. A general method for calculating error probabilities over fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2005, vol. 53, no. 5, pp. 841–852.
34. Brychkov Yu. A., Marichev O. I., Svischenko N. V. *Handbook of Mellin transforms*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2018. Pp. 359–371.
35. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 1: *Elementary functions*. New York, Gordon and Breach, 1986. Pp. 289–299.
36. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 2: *Special functions*. New York, Gordon and Breach, 1986. Pp. 171–192.
37. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 3: *More special functions*. New York, Gordon and Breach, 1990. Pp. 114–123.
38. Брычков Ю. А. *Специальные функции. Производные, интегралы, ряды и другие формулы*. М., Физматлит, 2006. С. 211–236.
39. Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N. *Continuous univariate distributions*. 2nd ed. New York, Wiley, 1994. Vol. 1. Pp. 212–218.
40. Patefield M., Tandy D. Fast and accurate calculation of Owen's T -function. *Journal of Statistical Software*, 2000, vol. 5, iss. 5, pp. 1–25.
41. Simon M. K. A simpler form of the Craig representation for the two-dimensional joint Gaussian Q -function. *IEEE Commun. Lett.*, 2002, vol. 6, pp. 49–51.
42. Srivastava H. M., Manocha H. L. *A Treatise on generating functions*. New York, John Wiley and Sons, 1984. Pp. 311–328.
43. Srivastava H. M., Karlsson P. W. *Multiple Gaussian hypergeometric series*. Hoboken, NJ, USA, Wiley, 1985. Pp. 283–291.

UDC 621.391

doi:10.31799/1684-8853-2019-1-76-88

Multi-position signal coherent reception error probability in a channel with generalized gamma or K fading and white noise

N. V. Svischenko^a, Dr. Sc., Tech., Professor orcid.org/0000-0001-5282-2506, snikaspb@mail.ruE. V. Lebeda^a, Post-Graduate Student, orcid.org/0000-0002-7919-1086^aS. M. Budenny Military Academy of Communication, 3, Tikhoretskii Pr., 190064, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: One of the main problems in communication theory is giving definitions to such characteristics of an information transmission system as noise immunity (error probability) and transfer rate. Their knowledge allows you to determine the transmitted information quality and quantity, respectively. The calculation of the error probability for a communications channel (for example, with fading) allows you to estimate the loss or gain in noise immunity with modems of various signal designs. **Purpose:** Developing a technique for calculating the probability of a bit error with coherent reception of signals in a communication channel with additive white Gaussian noise and general (non-selective in terms of frequency) fading described by gamma distribution or K distribution (called gamma fading and K fading respectively). **Results:** The obtained relations allow you to calculate the reception noise immunity in arbitrary two-dimensional signaling designs for a communication channel with gamma or K fading and additive white Gaussian noise. Examples are given of bit error probability calculation for phase modulation and quadrature-amplitude modulation signals. The calculation of error probability in a channel with fading for two different distribution laws was reduced to a new special function which is an integral of the product of Tricomi function and an algebraic function. This allowed us to develop a universal mathematical approach valid for both variants of fading. To calculate the new special function introduced in the article and its representation through the known functions, we used both classical hypergeometric functions and a generalized hypergeometric functions of two variables which is Kampé de Fériet function. **Practical relevance:** When using multi-position signal structures in new telecommunication standards, this technique allows you to obtain an estimate of their potential noise immunity, objectively comparing signal constructions and correctly choosing the best options for new modem developer.

Keywords — noise immunity, fading, signal constructions, bit error probability, PSK- M , QAM- M .

For citation: Svischenko N. V., Lebeda E. V. Multi-position signal coherent reception error probability in a channel with generalized gamma or K fading and white noise. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 1, pp. 76–88 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-1-76-88

References

- Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 1. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 4, pp. 86–104. doi:10.31799/1684-8853-2018-4-86-104
- Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 2. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 5, pp. 94–103. doi:10.31799/1684-8853-2018-5-94-103
- Sergeev A. M., Blaunstein N. Sh. Evolution of multiple-access networks — cellular and non-cellular — in historical perspective. Part 3. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2018, no. 6, pp. 82–94. doi:10.31799/1684-8853-2018-6-82-94
- Sklar B. *Digital communications: fundamentals and applications*. Pearson education limited. Williams, 2003. Pp. 961–1029.
- Proakis J. G. *Digital communications*. 4 ed. New York, McGraw-Hill, 2001. Pp. 257–284.

6. Simon M. K., Alouini M.-S. *Digital communications over fading channels: a unified approach to performance analysis*. New York, Wiley, 2005. Pp. 521–603.
7. Goldsmith A. *Wireless communications*. Cambridge, UK, Cambridge Univ. Press, 2005. Pp. 180–188.
8. Abdelaziz M., Gulliver T. A. Triangular constellations for adaptive modulation. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 2, pp. 756–766.
9. Rugini L. Symbol error probability of hexagonal QAM. *IEEE Commun. Lett.*, 2016, vol. 20, no. 8, pp. 1523–1526.
10. Lassing J., Strom E., Agrell E., Ottosson T. Computation of the exact bit-error rate of coherent M -ary PSK with Gray code bit mapping. *IEEE Trans. Commun.*, 2003, vol. 51, pp. 1758–1760.
11. Vitthaladevuni P. K., Alouini M.-S. Exact BER computation of generalized hierarchical PSK constellations. *IEEE Trans. Commun.*, 2003, vol. 51, pp. 2030–2037.
12. Vitthaladevuni P. K., Alouini M.-S. A closed-form expression for the exact BER of generalized PAM and QAM constellations. *IEEE Trans. Commun.*, 2004, vol. 52, pp. 698–700.
13. Tang X. Y., Alouini M.-S., Goldsmith A. J. Effect of channel estimation error on M -QAM BER performance in Rayleigh fading. *IEEE Trans. Commun.*, 1999, vol. 47, pp. 1856–1864.
14. Goldsmith A. J., Chua S.-G. Adaptive coded modulation for fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 1998, vol. 46, no. 5, pp. 595–602.
15. Simon M. K. *Probability distributions involving gaussian random: a handbook for engineers and scientists*. New York, Springer, 2006. Pp. 131–138.
16. Chiani M., Dardari D., Simon M. K. New exponential bounds and approximations for the computation of error probability in fading channels. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2003, vol. 2, no. 4, pp. 840–845.
17. Svischenko N. V. *Special integral functions used in wireless communications theory*. Singapore, World Scientific, 2014. Pp. 183–245.
18. Brychkov Yu. A., Svischenko N. V. A special function of communication theory. *Integral Transforms and Special Functions*, 2015, vol. 26(6), pp. 470–484.
19. Brychkov Yu. A., Svischenko N. V. Some properties of the Owen T -function. *Integral Transforms and Special Functions*, 2016, vol. 27(2), pp. 163–180.
20. Trigui I., Affes S., Liang B. Unified stochastic geometry modeling and analysis of cellular networks in LOS/NLOS and shadowed fading. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 12, pp. 5470–5486.
21. Paris J. F. Statistical characterization of κ - μ shadowed fading. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 2014, vol. 63, no. 2, pp. 518–526.
22. Pena-Martin J. P., Romero-Jerez J. M., Lopez-Martinez F. J. Generalized MGF of Beckmann fading with applications to wireless communications performance analysis. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 9, pp. 3933–3943.
23. Bithas P. S., Kanatas A. G., Da Costa D. B., Upadhyay P. K., Dias U. S. On the double-generalized gamma statistics and their application to the performance analysis of V2V communications. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 1, pp. 448–460.
24. Ganahe L., Sharma P. K., Varshney N., Tsiftsis T. A., Kumar P. An improved energy detector for mobile cognitive users over generalized fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2018, vol. 66, no. 2, pp. 534–545.
25. Yacoub M. D. The κ - μ distribution and the η - μ distribution. *IEEE Antennas Propag. Mag.*, 2007, vol. 49, no. 1, pp. 68–81.
26. Golovin O. V., Prosnov C. P. *Sistemy i ustrojstva korotkovolnovoj radiosvyazi* [System and devices shortwave communication]. Moscow, Goriachaia liniia-Telekom Publ., 2006. Pp. 147–156 (In Russian).
27. Ben Issaid C., Ben Rached N., Kammoun A., Alouini M. S., Tempone R. On the efficient simulation of the distribution of the sum of gamma-gamma varieties with applications to the outage probability evaluation over fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2017, vol. 65, no. 4, pp. 1839–1848.
28. Bithas P. S., Rontogiannidis A. A. Mobile communication systems in presence of fading/shadowing, noise and interference. *IEEE Trans. Commun.*, 2015, vol. 63, no. 3, pp. 724–737.
29. Bithas P. S., Sagias N. C., Mathiopoulos P. T., Karagiannidis G. K., Rontogiannidis A. A. On the performance analysis of digital communications over generalized- K fading channels. *IEEE Commun. Lett.*, 2006, vol. 10, no. 5, pp. 353–355.
30. Samimi H. Distribution of the sum of K -distributed random variables and applications in free-space optical communications. *IET Optoelectronics*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 1–6.
31. Ilushin Y. A. *Modeli fluktuiruyushchikh kanalov rasprostraneniya radiovoln* [Models of fluctuating channels spread radiowave]. Moscow, Moskovskij gosudarstvennyj universitet Publ., 2009. Pp. 132–141 (In Russian).
32. Chatzidiamantis N. D., Karagiannidis G. K. On the distribution of the sum of gamma-gamma variates and applications in RF and optical wireless communications. *IEEE Trans. Commun.*, 2011, vol. 59, no. 5, pp. 1298–1308.
33. Annamalai A., Tellambura C., Bhargava V. K. A general method for calculating error probabilities over fading channels. *IEEE Trans. Commun.*, 2005, vol. 53, no. 5, pp. 841–852.
34. Brychkov Yu. A., Marichev O. I., Svischenko N. V. *Handbook of Mellin transforms*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2018. Pp. 359–371.
35. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 1. *Elementary functions*. New York, Gordon and Breach, 1986. Pp. 289–299.
36. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 2. *Special functions*. New York, Gordon and Breach, 1986. Pp. 171–192.
37. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Vol. 3. *More special functions*. New York, Gordon and Breach, 1990. Pp. 114–123.
38. Brychkov Yu. A. *Spetsial'nye funktsii. Proizvodnye, integraly, ryady i drugie formuly* [Special function. Derivative, integrals, ranges and other formulas]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006. Pp. 211–236 (In Russian).
39. Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N. *Continuous univariate distributions*. 2nd ed. New York, Wiley, 1994. Vol. 1. Pp. 212–218.
40. Patefield M., Tandy D. Fast and accurate calculation of Owen's T -function. *Journal of Statistical Software*, 2000, vol. 5, iss. 5, pp. 1–25.
41. Simon M. K. A simpler form of the Craig representation for the two-dimensional joint Gaussian Q -function. *IEEE Commun. Lett.*, 2002, vol. 6, pp. 49–51.
42. Srivastava H. M., Manocha H. L. *A Treatise on generating functions*. New York, John Wiley and Sons, 1984. Pp. 311–328.
43. Srivastava H. M., Karlsson P. W. *Multiple Gaussian hypergeometric series*. Hoboken, NJ, USA, Wiley, 1985. Pp. 283–291.