

УДК 519.17

doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.23

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПЕСОЧНОЙ ГРУППОЙ ГРАФА И ЕГО МАТРОИДОМ

И. А. Крепкий^{а, 1}, аспирант^аСанкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, РФ

Постановка проблемы: определение структуры песочных групп графов представляет собой сложную вычислительную задачу. В попытке снизить сложность решения данной задачи для некоторых классов графов была обнаружена зависимость между песочной группой графа и его матроидом: структура песочной группы графа зависит только от его матроида. Целью статьи является доказательство данного утверждения. **Методы:** для доказательства изоморфности песочных групп 2-изоморфных графов были использованы элементарные операции с матрицами Лапласа этих графов. Основной результат статьи получен как следствие теоремы Уитни о 2-изоморфных графах. **Результаты:** доказано, что структура песочной группы графа полностью определяется структурой матроида этого графа.

Ключевые слова — песочные группы, графы, матроиды, нормальная форма Смита, 2-изоморфные графы.

Введение

Конструкция песочной группы впервые появилась в виде частного случая, описанного под названием VTW-модель Пером Баком, Чао Тангом и Куртом Вейзенфельдом [1]. Основной мотивацией для создания этой модели была попытка демонстрации и объяснения эффекта самоорганизованной критичности, возникающего в различных естественных процессах, таких как землетрясения, эпидемии, лесные пожары и т. д. Указанную модель обобщил Дипак Дхар [2], что и привело к появлению понятия песочной группы графа.

Песочная группа связного графа представляет собой подмножество множества так называемых редуцированных песочных куч графа (песочная куча — отображение из множества вершин графа в множество неотрицательных чисел), снабженным операцией сложения куч (сложение — поточечное суммирование песочных куч с последующим редуцированием результата при помощи процедуры, определяемой конструкцией графа). В песочную группу входят только так называемые рекуррентные песочные кучи, удовлетворяющие *burning test* [3]. Структурно песочная группа графа представляет собой конечную абелеву группу.

Песочные группы обладают серией интересных свойств. Так, например, из матричной теоремы о деревьях [4] следует, что порядок песочной группы графа равен количеству его остовных деревьев. Явная биекция между элементами песочной груп-

пы и остовными деревьями была сконструирована в работе [5]. Также известно, что песочная группа связного планарного графа изоморфна песочной группе графа, дуального данному [6].

Песочные группы графов нередко упоминаются в довольно неожиданных контекстах. Так, например, в работе [7] граф рассматривается как дискретный аналог римановой поверхности и доказан аналог теоремы Римана — Роха. Если в классической теореме Римана — Роха дивизорами являются целочисленные линейные комбинации точек римановой поверхности, то в дискретном аналоге роль дивизоров играют элементы песочной группы графа. Также о связи песочных групп с алгебраической геометрией см. в работе [8].

Иногда совершенно неожиданно обнаруживаются изоморфизмы каких-либо серий групп с песочными группами определенных серий графов. Например, группы, изоморфные песочным группам, возникают в связи с вопросами замощения прямоугольной доски фигурами домино [9]. В работе [10] была установлена связь между некоторыми группами действий на множествах непериодических двухцветных ожерелий и песочными группами графов де Бройна.

Основной целью данной статьи является установление взаимосвязи между структурой песочных групп графов и структурой матроидов этих графов.

Определения

Будем считать, что две квадратные целочисленные матрицы эквивалентны, если одна из них может быть получена из другой применением конечного числа операций прибавления/вычитания одного столбца/строки к другому.

¹ Научный руководитель — старший научный сотрудник лаборатории теории представлений и динамических систем Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН Н. Н. Васильев.

Определение 1. Любая квадратная целочисленная матрица M эквивалентна матрице M' вида

$$\begin{bmatrix} f_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $f_k | f_{k+1}$, $1 \leq k \leq r-1$. Матрица M' называется нормальной формой Смита матрицы M [11].

Пусть M — квадратная целочисленная матрица. Будем обозначать как \bar{M} мультимножество диагональных элементов нормальной формы Смита матрицы M .

Определение 2. Пусть n вершин мультиграфа G пронумерованы от 1 до n . Пусть M — квадратная матрица размера $n \times n$, устроенная следующим образом: элемент матрицы $m_{(i,j)}$ равен $-\text{deg}(v_i)$ при $i = j$, если же $i \neq j$, то элемент равен количеству ребер, соединяющих вершины i и j . Матрица M называется матрицей Лапласа графа G .

Мы будем использовать (как в работе [12]) определение песочной группы мультиграфа, построенное в терминах нормальной формы Смита матрицы Лапласа этого графа.

Определение 3. Песочная группа мультиграфа G — это группа $S(G) \cong \bigoplus_{a \in (\bar{M} \setminus \{0\})} C_a$, где M — матрица

Лапласа мультиграфа G .

Операции с графами и песочные группы

Пусть P и Q — некоторые мультиграфы и $p \in V(P)$, $q \in V(Q)$. Пусть мультиграф \hat{F} получен из P и Q через соединение ребром e вершин p и q , а мультиграф F получен из \hat{F} стягиванием ребра pq . В таком случае будем говорить, что F получен из P и Q при помощи склеивания вершин p и q . Точно так же если $p \in P$, $q \in P$, мы можем построить новое ребро pq и стянуть его, говоря, что полученный мультиграф построен при помощи склеивания вершин p и q . В работе [13] данную операцию называют «vertex identification». Обратную ей операцию (т. е. нарушение связности графа F при помощи единичного разрезания в некоторой вершине на графы P и Q) называют «vertex splitting».

Пусть теперь P — мультиграф, состоящий из $p+2$ вершин, пронумерованных от 1 до $p+2$, где $p \geq 0$.

Пусть Q — мультиграф, состоящий из $q+2$ вершин, пронумерованных от 1 до $q+2$, где $q \geq 0$.

Пусть $F_+(P,Q)$ получен через склеивание $(p+1)$ -й вершины P с 1-й вершиной Q и склеивание $(p+2)$ -й вершины P со 2-й вершиной Q .

Пусть $F_-(P,Q)$ получен через склеивание $(p+1)$ -й вершины P со 2-й вершиной Q и склеивание $(p+2)$ -й вершины P с 1-й вершиной Q .

Говорят [13], что граф $F_+(P,Q)$ получен из $F_-(P,Q)$ при помощи операции «twisting».

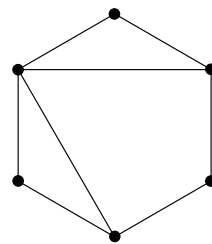
Теорема 1. $S(F_+(P,Q)) \cong S(F_-(P,Q))$.

Пример. На рис. 1 и 2 изображены произвольно выбранные связные графы. Выбор пары вершин на каждом из этих графов дает нам конструкции соответствующих графов $F_+(P,Q)$ и $F_-(P,Q)$ (рис. 3 и 4). Здесь $S(F_+(P,Q)) \cong C_3 * C_{420} \cong S(F_-(P,Q))$.

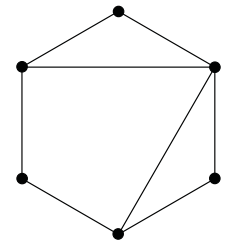
Доказательство: достаточно показать, что матрицы Лапласа мультиграфов F_+ и F_- эквивалентны в том смысле, что имеют общую нормальную форму Смита.

Пусть матрицы Лапласа мультиграфов P и Q выглядят следующим образом:

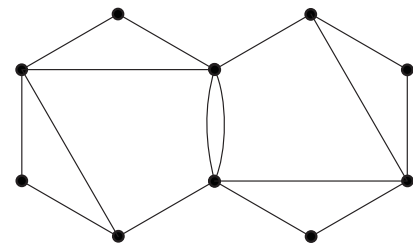
$$\begin{bmatrix} \hat{P} & \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_p & b_p \end{matrix} \\ a_1 \dots a_p & \begin{matrix} -A & X \\ X & -B \end{matrix} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \begin{matrix} -C & Y & c_1 & \dots & c_q \\ Y & -D & d_1 & \dots & d_q \\ c_1 & d_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \hat{Q} \\ c_q & d_q & & & \end{matrix} \end{bmatrix},$$



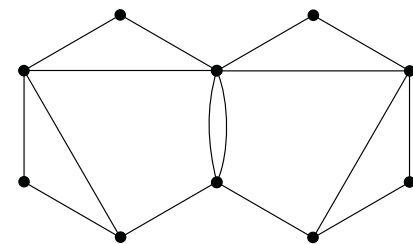
■ Рис. 1. Граф P



■ Рис. 2. Граф Q



■ Рис. 3. Граф $F_+(P,Q)$



■ Рис. 4. Граф $F_-(P,Q)$

где \hat{P} и \hat{Q} — какие-то матрицы. Здесь справедливы равенства

$$A = a_1 + \dots + a_p + X; B = b_1 + \dots + b_p + X;$$

$$C = c_1 + \dots + c_q + Y; D = d_1 + \dots + d_q + Y.$$

Сохранив введенные обозначения, опишем матрицы Лапласа мультиграфов F_+ и F_- (считаем, что склеивание происходит через $(p+1)$, $(p+2)$ вершины P и 1, 2 вершины Q).

Матрица Лапласа мультиграфа F_+

$$\begin{bmatrix} & & a_1 & b_1 & & & & & \\ & & \vdots & \vdots & & & & & \\ & & a_p & b_p & & & & & \\ a_1 & \dots & a_p & -A-C & X+Y & c_1 & \dots & c_q & \\ b_1 & \dots & b_p & X+Y & -B-D & d_1 & \dots & d_q & \\ & & c_1 & d_1 & & & & & \\ & & \vdots & \vdots & & & & \hat{Q} & \\ & & c_q & d_q & & & & & \end{bmatrix}.$$

Матрица Лапласа мультиграфа F_-

$$\begin{bmatrix} & & a_1 & b_1 & & & & & \\ & & \vdots & \vdots & & & & & \\ & & a_p & b_p & & & & & \\ a_1 & \dots & a_p & -A-D & X+Y & d_1 & \dots & d_q & \\ b_1 & \dots & b_p & X+Y & -B-C & c_1 & \dots & c_q & \\ & & d_1 & c_1 & & & & & \\ & & \vdots & \vdots & & & & \hat{Q} & \\ & & d_q & c_q & & & & & \end{bmatrix}.$$

Обозначим указанные матрицы соответственно как F_+ и F_- .

Легко видеть, что на нормальную форму Смита не влияют следующие действия:

1) прибавление/вычитание одной строки/столбца матрицы к другой;

2) перемена местами произвольных двух строк или двух столбцов матрицы (следствие из п. 1);

3) умножение произвольной строки/столбца на -1 (следствие из п. 1).

Кроме того, полезно учесть, что столбцы и строки матрицы Лапласа F произвольного мультиграфа линейно зависимы. Следовательно, $0 \in \bar{F}$, где \bar{F} — мультимножество элементов диагонали нормальной формы Смита матрицы F . При этом для матрицы F' , полученной через удаление из F столбца и строки, пересекающихся на диагонали, справедливо равенство $\bar{F}' = \bar{F} \setminus \{0\}$.

Удалим $(p+2)$ -й столбец из матриц F_+ и F_- , обозначив полученные матрицы как F'_+ и F'_- .

Матрица F'_+ :

$$\begin{bmatrix} & & a_1 & & & & & & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & a_p & & & & & & \\ a_1 & \dots & a_p & -A-C & c_1 & \dots & c_q & & \\ & & c_1 & & & & & \hat{Q} & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & c_q & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Матрица F'_- :

$$\begin{bmatrix} & & a_1 & & & & & & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & a_p & & & & & & \\ a_1 & \dots & a_p & -A-D & d_1 & \dots & d_q & & \\ & & d_1 & & & & & \hat{Q} & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & d_q & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Теперь нам достаточно показать, что матрицы F'_+ и F'_- эквивалентны. Проведем серию манипуляций с матрицей F'_- .

Прибавим к $(p+1)$ -му столбцу все последующие за ним столбцы:

$$\begin{bmatrix} & & a_1 & & & & & & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & a_p & & & & & & \\ a_1 & \dots & a_p & -A-Y & d_1 & \dots & d_q & & \\ & & -c_1 & & & & & \hat{Q} & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & -c_q & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Прибавим к $(p+1)$ -й строке все последующие за ней строки:

$$\begin{bmatrix} & & a_1 & & & & & & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & a_p & & & & & & \\ a_1 & \dots & a_p & -A-C & -c_1 & \dots & -c_q & & \\ & & -c_1 & & & & & \hat{Q} & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & -c_q & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Домножим на -1 строки и столбцы с 1-й по $(p+1)$ -ю:

$$\begin{bmatrix} & & a_1 & & & & & & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & a_p & & & & & & \\ a_1 & \dots & a_p & -A-C & c_1 & \dots & c_q & & \\ & & c_1 & & & & & \hat{Q} & \\ & & \vdots & & & & & & \\ & & c_q & & & & & & \end{bmatrix}.$$

Мы получили матрицу, равную матрице F'_+ , т. е. F'_+ и F'_- эквивалентны, что равносильно $S(F'_+(P, Q)) \cong S(F'_-(P, Q))$, ч. т. д.

Кроме того, в работах [14, 15] были доказаны еще две теоремы подобного рода. Пусть $p \in V(P)$ и $q \in V(Q)$, где P и Q — какие-то мультиграфы. Мультиграф $X(P, Q)$ получен посредством склеивания вершин p и q . Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Структура $S(X(P, Q))$ не зависит от выбора вершин p и q . Кроме того, $S(X(P, Q)) \cong S(P) * S(Q)$ [14].

Так, например, песочная группа каждого из трех графов, изображенных на рис. 5, изоморфна $(C_3)^7$, так как песочная группа циклического графа из трех вершин изоморфна C_3 .

Для формулировки третьей теоремы определим конструкцию мультиграфа H_i . Пусть F и G — некоторые мультиграфы. Пусть f_1 и f_2 — неотрицательные целочисленные функции на множестве вершин F , а g_1 и g_2 — неотрицательные целочисленные функции на множестве вершин G . Обозначим как T циклический мультиграф, состоящий из n вершин. Пронумеруем вершины этих трех мультиграфов натуральными числами:

- 1) r вершин F пронумерованы от 1 до r ;
- 2) n вершин T пронумерованы от $r + 1$ до $r + n$ в порядке их следования в цикле;
- 3) s вершин G пронумерованы от $r + n + 1$ до $r + n + s$.

Теперь для $i \in Z, 0 \leq i \leq n - 2$ построим мультиграф H_i .

1. Соединим каждую вершину v мультиграфа G с $(r + n - 1)$ -й вершиной мультиграфа T при помощи $g_1(v)$ ребер.

2. Соединим каждую вершину v мультиграфа G с $(r + n)$ -й вершиной мультиграфа T при помощи $g_2(v)$ ребер.

3. Соединим каждую вершину v мультиграфа F с $(r + i)$ -й вершиной мультиграфа T при помощи $f_1(v)$ ребер (если $1 \leq i \leq n - 2$) или же соединим каждую вершину v мультиграфа F с $(r + n)$ -й вершиной мультиграфа T при помощи $f_1(v)$ ребер (если $i = 0$).

4. Соединим каждую вершину v мультиграфа F с $(r + i + 1)$ -й вершиной мультиграфа T при помощи $f_2(v)$ ребер.

Теорема 3. Структура $S(H_i)$ не зависит от выбора i [15].

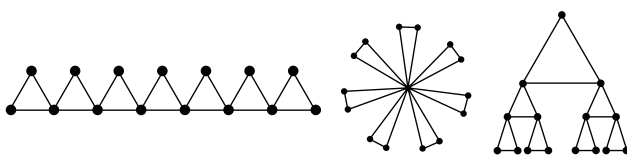


Рис. 5. Графы с песочными группами, изоморфными $(C_3)^7$

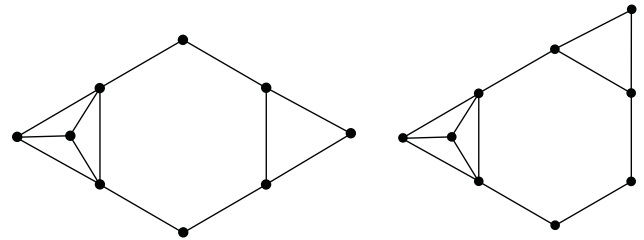


Рис. 6. Графы с песочными группами, изоморфными C_{248}

Так, например, на рис. 6 изображены графы H_1 и H_2 , для которых F — полный граф на двух вершинах, G — полный граф на одной вершине (вершина без ребер), а T — 6-цикл. Песочные группы обоих графов изоморфны C_{248} .

Связь матроида графа с его песочной группой

Определение 4. Если граф G изоморфен некоторому графу, полученному из графа H через последовательность операций vertex identification, vertex splitting, twisting, то графы G и H называют 2-изоморфными [13].

В теореме 1 графы F_+ и F_- — это в точности такие графы, один из которых получен из другого при помощи операции twisting. Напротив, если какой-то связный граф построен из другого при помощи данной операции, то конструкции этих графов можно описать как $F_+(P, Q)$ и $F_-(P, Q)$ для каких-то P и Q .

В теореме 2 речь идет о графе $X(P, Q)$, конструкция которого зависит от выбора одной вершины на графе P и одной вершины на графе Q . Каждый из графов $X(P, Q)$ может быть получен из любого другого такого графа при помощи последовательного применения операций vertex splitting и vertex identification. И, напротив, если какой-то связный граф получен из другого связного графа при помощи данных операций, то конструкции обоих графов можно описать как $X(P, Q)$ для каких-то P и Q . Соответственно, из теорем 1 и 2 следует *лемма*. Если связные графы G и H 2-изоморфны, то $S(G) \cong S(H)$.

Определение 5. Матроидом называется пара (X, I) , где X — конечное множество, называемое носителем матроида, а I — некоторое множество подмножеств X , называемое семейством независимых множеств. При этом должны выполняться следующие условия:

- 1) $\emptyset \in I$;
- 2) если $A \in I$ и $B \subset A$, то $B \in I$;
- 3) если $A, B \in I$ и $|A| > |B|$, то существует $x \in A \setminus B$ такой, что $B \cup \{x\} \in I$.

Определение 6. Матроидом графа G называют матроид M_G , чье базовое множество — $V(G)$ — мно-

жество ребер графа G , а независимым множеством является лес, образованный какими-то из ребер множества $V(G)$ [13].

Изоморфность матроидов двух графов G и H без изолированных вершин влечет их 2-изоморфность. Этот факт составляет содержание следующей теоремы.

Теорема Уитни. Графы G и H без изолированных вершин 2-изоморфны тогда и только тогда, когда их матроиды M_G и M_H изоморфны [13].

Отсюда и из леммы сразу же следует теорема.

Теорема 4. Если для каких-то связных графов G и H их матроиды M_G и M_H изоморфны, то $S(G) \cong S(H)$.

Заключение

В данной работе были представлены теоремы о некоторых операциях над графами, сохраняющих структуру их песочных групп. Доказанные теоремы позволили получить в качестве следствия основной результат работы — утверждение

о том, что структура песочной группы графа зависит только от структуры матроида этого графа.

Стоит отметить, что операции H_i из теоремы 3 сохраняют структуру песочной группы графа, но не структуру его матроида. Существуют ли другие элементарные операции, обладающие подобным свойством и не являющиеся композицией операций, уже указанных в работе, автору на данный момент неизвестно.

Благодарности

Автор выражает благодарность доктору физико-математических наук Сергею Васильевичу Дужину за научное руководство и череду интересных бесед, благодаря которым стало возможно написание данной статьи.

Автор также благодарит кандидата физико-математических наук Николая Николаевича Васильева за продолжение научного руководства, советы и замечания, которые помогли завершить работу.

Литература

1. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized Criticality: an Explanation of $1/f$ noise// Physical Review Letters. 1987. N 59(4). P. 381–384.
2. Dhar D. Self-organized Critical State of Sandpile Automaton Models// Physical Review Letters. 1990. N 64(14). P. 1613–1616.
3. Pietronero L., Tartaglia P., Zhang Y. Theoretical Studies of Self-Organized Criticality. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 1991. N 173(1). P. 22–44.
4. Kirchhoff G. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer Ströme geführt wird// Archives of Chemistry and Physics. 1847. N 72. P. 497–508.
5. Bernardi Olivier. Tutte Polynomial, Subgraphs, Orientations and Sandpile Model: New Connections via Embeddings//The Electronic Journal of Combinatorics. 2008. N 15(1). P. 109.
6. Cori Robert, Rossin Dominique. On the Sandpile Group of Dual Graphs//European Journal of Combinatorics. 2000. N 21(4). P. 447–459.
7. Baker M., Norine S. Riemann–Roch and Abel–Jacobi Theory on a Finite Graph//Advances in Mathematics. 2007. N 215(2). P. 766–788.
8. Perkinson David, Perlman Jacob, Wilmes John. Primer for the Algebraic Geometry of Sandpiles, Tropical and non-Archimedean Geometry//Contemporary Mathematics. 2013. N 605. P. 211–256.
9. Florescu Laura, Morar Daniela, Perkinson David, Salter Nick, Xu Tianyuan. Sandpiles and Dominos. <http://arxiv.org/abs/1406.0100> (дата обращения: 21.05.2015).
10. Duzhin S., Pasechnik D. Automorphisms of Necklaces and Sandpile Groups. <http://arxiv.org/abs/1304.2563> (дата обращения: 21.05.2015).
11. Matthews K. R. Smith Normal Form. <http://www.numbertheory.org/courses/MP274/smith.pdf> (дата обращения: 21.05.2015).
12. Крепкий И. А. Песочные группы треугольных бинарных деревьев. <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2012/12-21.html> (дата обращения: 21.05.2015).
13. Theory of Matroids/ Ed. by N. White. — Cambridge University Press, 1986. XVII. — 316 p. (Ser. Encyclopedia of Mathematics and its Application. Vol. 26).
14. Крепкий И. А. Склеивание графов и песочные группы//Записки научных семинаров ПОМИ. 2013. Т. 411. С. 119–124.
15. Крепкий И. А. The Sandpile Groups of Chain-Cyclic Graphs//Записки научных семинаров ПОМИ. 2014. Т. 421. С. 94–112.

UDC 519.17

doi:10.15217/issn1684-8853.2015.3.23

Relation between the Sandpile Group of a Graph and its MatroidKrepkiy I. A.^a, Post-Graduate Student, feb418@gmail.com^aSaint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, 7-9, Universitetskaya nab., Saint-Petersburg, 199034, Russian Federation

Purpose: Determining the structure of sandpile groups of graphs is a complex computational problem. When trying to reduce its solution complexity for some classes of graphs, a strong correspondence was found between the sandpile group of a graph and its matroid. Namely, the structure of the sandpile group depends only on the matroid. The purpose of this article is proving this statement. **Methods:** In order to prove that a 2-isomorphic graph has isomorphic sandpile groups, some elementary operations were used with Laplacian matrices of such a graph. The main result of the work was obtained as a corollary of Whitney's theorem about 2-isomorphic graphs. **Results:** It has been proved that the structure of the sandpile group of a graph is completely determined by the structure of its matroid.

Keywords — Sandpile Groups, Graphs, Matroids, Smith Normal Form, 2-Isomorphic Graphs.

References

1. Bak P., Tang C., Wiesenfeld K. Self-organized Criticality: an Explanation of $1/f$ noise. *Physical Review Letters*, 1987, no. 59(4), pp. 381–384.
2. Dhar D. Self-organized Critical State of Sandpile Automaton Models. *Physical Review Letters*, 1990, no. 64(14), pp. 1613–1616.
3. Pietronero L., Tartaglia P., Zhang Y. Theoretical Studies of Self-Organized Criticality. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 1991, no. 173(1), pp. 22–44.
4. Kirchhoff G. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer Ströme geführt wird. *Archives of Chemistry and Physics*, 1847, no. 72, pp. 497–508 (In German).
5. Bernardi Olivier. Tutte Polynomial, Subgraphs, Orientations and Sandpile Model: New Connections via Embeddings. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2008, no. 15(1), p. 109.
6. Cori Robert, Rossin Dominique. On the Sandpile Group of Dual Graphs. *European Journal of Combinatorics*, 2000, no. 21(4), pp. 447–459.
7. Baker M., Norine S. Riemann—Roch and Abel—Jacobi Theory on a Finite Graph. *Advances in Mathematics*, 2007, no. 215(2), pp. 766–788.
8. Perkinson David, Perlman Jacob, Wilmes John. Primer for the Algebraic Geometry of Sandpiles, Tropical and non-Archimedean Geometry. *Contemporary Mathematics*, 2013, no. 605, pp. 211–256.
9. Florescu Laura, Morar Daniela, Perkinson David, Salter Nick, Xu Tianyuan. *Sandpiles and Dominos*. Available at: <http://arxiv.org/abs/1406.0100> (accessed 21 May 2015).
10. Duzhin S., Pasechnik D. *Automorphisms of Necklaces and Sandpile Groups*. Available at: <http://arxiv.org/abs/1304.2563> (accessed 21 May 2015).
11. Matthews K. R. *Smith Normal Form*. Available at: <http://www.numbertheory.org/courses/MP274/smith.pdf> (accessed 21 May 2015).
12. Krepkiy I. A. *Sandpile Groups of Triangular Binary Trees*. Available at: <http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2012/12-21.html> (accessed 21 May 2015).
13. White N. (ed.). *Theory of Matroids*. Cambridge University Press, 1986. XVII. 316 p. (Ser. Encyclopedia of Mathematics and its Application, vol. 26).
14. Krepkiy I. A. Sandpile Groups and the Join of Graphs. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, 2013, vol. 411, pp. 119–124 (In Russian).
15. Krepkiy I. A. The Sandpile Groups of Chain-Cyclic Graphs. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, 2014, vol. 421, pp. 94–112.