

Оптимизация терминального контроля управляемых динамических систем

Л. А. Мироновский^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-3584-7095

Т. Н. Соловьева^а, канд. техн. наук, доцент, orcid.org/0000-0002-6371-8373, al2tn@yandex.ru

Д. В. Шинтяков^а, канд. техн. наук, доцент, orcid.org/0000-0002-7950-0694

^аСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

Введение: удобным с точки зрения простоты контроля тестовым методом диагностирования отклонений параметров управляемых динамических систем является метод Шрайбера, использующий в качестве тестового сигнала набор прямоугольных импульсов равной длительности. Так как для одного объекта может быть построено множество тестовых сигналов, отличающихся числом импульсов, возникает задача минимизации числа тестовых импульсов при контроле системы методом Шрайбера. **Цель:** упрощение процедуры тестового контроля и диагностики линейных управляемых динамических систем. **Результаты:** показано, что множество векторов амплитуд тестовых импульсов является ядром матрицы управляемости дискретного аналога объекта диагностирования. Сформулирована задача поиска оптимальной длины тестового импульса для минимизации числа импульсов тестового сигнала. Показано, что при заданной длине импульса амплитуды импульсов оптимального тестового сигнала равны коэффициентам минимального полинома вектора управления дискретного аналога объекта относительно системной матрицы дискретного аналога объекта. Показано, что сокращение числа тестовых импульсов возможно за счет выбора длительности импульса, рассчитанной из мнимой составляющей полюсов объекта. В частности, при наличии у объекта хотя бы одной пары комплексно-сопряженных полюсов число тестовых импульсов как минимум не превышает порядок объекта. Разработан соответствующий алгоритм расчета тестового сигнала для диагностирования линейного управляемого объекта методом Шрайбера. Входными данными алгоритма является системная матрица объекта, а выходными — длина тестового импульса и вектор амплитуд импульсов. Работоспособность алгоритма проиллюстрирована на примере диагностирования двух технических объектов. **Практическая значимость:** результаты исследования могут быть применены для проведения тестового контроля статических параметров управляемых динамических объектов, допускающих линейное описание в пространстве состояний.

Ключевые слова — контроль, диагностика, метод Шрайбера, комплементарный сигнал, минимальный полином, оптимизация.

Для цитирования: Мироновский Л. А., Соловьева Т. Н., Шинтяков Д. В. Оптимизация терминального контроля управляемых динамических систем. *Информационно-управляющие системы*, 2019, № 6, с. 12–21. doi:10.31799/1684-8853-2019-6-12-21

For citation: Mironovsky L. A., Solov'eva T. N., Shintyakov D. V. Fault detection optimization for controllable dynamic systems. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 6, pp. 12–21 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-6-12-21

Введение

Одной из важных прикладных отраслей теории управления является техническая диагностика управляемых динамических систем.

К основным задачам, решаемым при диагностировании, т. е. при оценке технического состояния объекта, относятся обнаружение наличия дефекта (контроль), его локализация (диагностика), определение неисправного элемента объекта и идентификация (определение величины дефекта).

К настоящему времени разработано большое количество методов диагностирования [1–18]. Эти методы по режиму диагностирования можно разделить на два класса: тестовые и функциональные. При функциональном диагностировании оценка состояния объекта происходит в рабочем режиме. Преимуществом такого подхода является возможность контроля объекта в процессе его эксплуатации. Однако в рабочем режиме могут

быть выявлены не все неисправности на ранней стадии их возникновения. В связи с этим во многих случаях тестовое диагностирование, при котором объект снимается с эксплуатации и подвергается воздействию специальных тестовых сигналов, является более информативным по сравнению с функциональным.

В основу ряда методов тестового диагностирования динамических систем положена задача терминального управления, которая состоит в расчете управляющего воздействия, переводящего объект из одной заданной точки пространства состояний в другую [19]. Преимуществом такого подхода является простота контроля и малое число необходимых тестовых измерений. Одним из таких методов диагностирования является метод комплементарного сигнала, который по имени его создателя также называют методом Шрайбера [20, 21]. Среди множества терминальных методов метод Шрайбера выделяется про-

стойкой процедуры диагностирования: удобной формой тестового сигнала, нулевыми начальным и конечным состояниями объекта в случае отсутствия дефектов. Однако следует отметить, что метод не чувствителен к дефектам параметров, не влияющих на системную матрицу объекта диагностирования.

Тестовый сигнал при диагностировании методом Шрайбера представляет собой конечную последовательность прямоугольных импульсов. При этом для одного и того же объекта существует множество нетривиальных комплементарных сигналов, отличающихся числом импульсов, их длительностью и амплитудами. Выбор комплементарного сигнала из множества целесообразно производить путем решения оптимизационной задачи. Для этого необходимо:

- описать множество комплементарных сигналов;
- сформулировать критерий оптимизации;
- разработать алгоритм поиска оптимального комплементарного сигнала;
- оценить качество контроля при использовании оптимального сигнала.

В статье предлагаются решения поставленных задач для оптимизации числа диагностических импульсов комплементарного сигнала. Полученные результаты подтверждаются данными компьютерного моделирования.

Постановка задачи оптимизации комплементарного сигнала

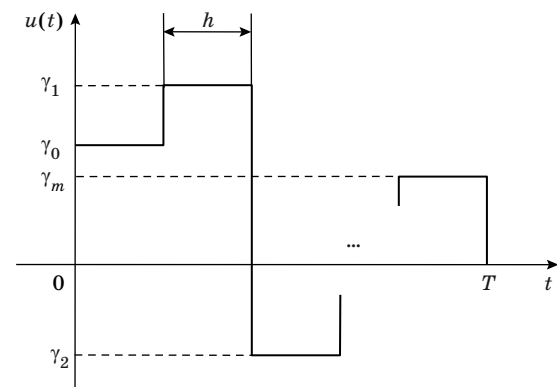
Основная идея метода Шрайбера заключается в расчете нетривиального кусочно-постоянного терминального управления, переводящего объект из нулевого начального состояния в нулевое конечное состояние. Рассчитанное воздействие называют *комплементарным сигналом*. Если при подаче комплементарного сигнала на объект задача терминального управления не выполняется, объект считается неисправным.

Определим множество комплементарных сигналов для управляемого и наблюдаемого линейного динамического объекта, заданного описанием в пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t); \\ y(t) &= \mathbf{c}\mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор переменных состояния; $u(t)$ — скалярный входной сигнал; $y(t)$ — скалярный выходной сигнал; \mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} — матрицы соответствующих размеров.

Кусочно-постоянный сигнал (рис. 1), состоящий из $m + 1$ импульсов, может быть описан следующим образом:



■ **Рис. 1.** Вид тестового сигнала при контроле методом Шрайбера

■ **Fig. 1.** Test signal for Schreiber fault detection and isolation (FDI) method

$$u(t) = \gamma_0 \eta(t) + \gamma_1 \eta(t-h) + \dots + \gamma_m \eta(t-mh), \quad (2)$$

где $\eta(t) = 1(t) - 1(t-h)$ — диагностический импульс конечной длительности h , $1(t)$ — функция Хевисайда; $\gamma_0, \dots, \gamma_m$ — постоянные коэффициенты. Длительность управляющего воздействия составляет $T = (m + 1)h$.

По определению, сигнал (2) является комплементарным для объекта (1), если он переводит объект из состояния $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ в состояние $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$. Расчет комплементарного сигнала сводится к определению амплитуд $\gamma_0, \dots, \gamma_m$ диагностических импульсов и выбору длительности h .

Утверждение 1. Амплитуды диагностических импульсов комплементарного сигнала (2) для объекта (1) равны коэффициентам аннулирующего полинома вектора $\mathbf{p}(h) = (e^{\mathbf{A}h} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ относительно матрицы $e^{\mathbf{A}h}$.

Доказательство:

□ Как известно, реакция $\mathbf{x}(t)$ линейного объекта (1) на единичный скачок $1(t)$ определяется формулой

$$\mathbf{p}(t) = \left(\int_0^t e^{\mathbf{A}t} dt \right) \mathbf{b} = (e^{\mathbf{A}t} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad (3)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица.

Из (3) следует, что при входном сигнале (2) состояние объекта в момент времени h (по окончании первого импульса) будет иметь вид

$$\mathbf{x}(h) = \gamma_0 \mathbf{p}(h).$$

Состояние объекта в момент окончания второго импульса будет складываться из результата свободного движения объекта из состояния $\mathbf{x}(h)$ и реакции на второй импульс:

$$\mathbf{x}(2h) = e^{\mathbf{A}h} \mathbf{x}(h) + \gamma_1 \mathbf{p}(h) = \left(\gamma_0 e^{\mathbf{A}h} + \gamma_1 \mathbf{I} \right) \mathbf{p}(h).$$

Рассуждая аналогичным образом, получим состояние объекта в момент окончания третьего импульса

$$\mathbf{x}(3h) = e^{Ah}\mathbf{x}(2h) + \gamma_2\mathbf{p}(h) = (\gamma_0 e^{2Ah} + \gamma_1 e^{Ah} + \gamma_2 \mathbf{I})\mathbf{p}(h).$$

По окончании входного воздействия (2) в момент времени $T = (m + 1)h$ состояние объекта будет иметь вид

$$\mathbf{x}(T) = (\gamma_0 \Phi^m + \gamma_1 \Phi^{m-1} + \dots + \gamma_{m-1} \Phi + \gamma_m \mathbf{I})\mathbf{p}(h), \quad (4)$$

где $\Phi = e^{Ah}$.

Из (4) следует, что для того, чтобы нетривиальный сигнал (2) переводил объект (1) в состояние $\mathbf{x}(T) = \mathbf{0}$, необходимо и достаточно, чтобы полином

$$P(\mu) = \gamma_0 \mu^m + \gamma_1 \mu^{m-1} + \dots + \gamma_{m-1} \mu + \gamma_m \quad (5)$$

был аннулирующим полиномом вектора $\mathbf{p}(h)$ относительно матрицы Φ . ■

Из равенства (4) следует, что расчет коэффициентов комплементарного сигнала при заданной длительности импульса h сводится к поиску вектора

$$\gamma = [\gamma_m \dots \gamma_0]^T, \gamma \in \ker \mathbf{R}(h)\delta,$$

где $\mathbf{R}(h) = [\mathbf{p}(h), \Phi\mathbf{p}(h), \dots, \Phi^m\mathbf{p}(h)]$; $\delta \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Отметим, что для дискретного аналога объекта диагностирования (1) вектор $\mathbf{p}(h)$ является вектором управления, матрица Φ — системной матрицей, а матрица $\mathbf{R}(h)$ — матрицей управляемости.

Обозначим $\mathbf{H}(t, h) = [\eta(t + mh), \dots, \eta(t + h), \eta(t)]$. Тогда множество комплементарных сигналов для объекта диагностирования (1) можно определить как

$$U = \{u(t, h) = \mathbf{H}(t, h)\gamma \mid \gamma \in \ker \mathbf{R}(h)\delta\}.$$

Один из способов расчета сигнала (2), описанный в работе [21], состоит в использовании в качестве полинома (5) характеристического полинома матрицы e^{Ah} .

Для проведения диагностического эксперимента целесообразно использовать комплементарный сигнал с минимально возможным числом диагностических импульсов. Согласно утверждению 1, решение этой задачи эквивалентно поиску минимального полинома вектора $\mathbf{p}(h)$ относительно матрицы $\Phi = e^{Ah}$:

$$P_{\Phi(h), \mathbf{p}(h)}(\mu) = \arg \min_{P \in \Gamma_{\Phi(h), \mathbf{p}(h)}} (\deg(P(\mu))), \quad (6)$$

где $\Gamma_{\Phi(h), \mathbf{p}(h)}$ — множество аннулирующих полиномов вектора $\mathbf{p}(h)$ относительно матрицы Φ .

Порядок полинома (6) и значения его коэффициентов для объекта (1) зависят от длительности диагностического импульса h . Таким образом, получаем следующую оптимизационную задачу:

$$h_{\min} = \arg \min_{h>0} (\deg(P_{\Phi(h), \mathbf{p}(h)}(\mu))). \quad (7)$$

Задача (7) заключается в поиске значения h , при котором порядок полинома (6), а следовательно, и число диагностических импульсов сигнала (2) будут минимальны.

Решение задачи оптимизации комплементарного сигнала

Для решения задачи (7) рассмотрим вспомогательную задачу

$$h_{\min} = \arg \min_{h>0} (\deg(P_{\Phi(h)}(\mu))), \quad (8)$$

где $P_{\Phi(h)}(\mu)$ — минимальный полином матрицы $\Phi = e^{Ah}$.

Заметим, что поскольку минимальный полином вектора по отношению к матрице делит минимальный полином этой матрицы, решение задачи (8) является решением и для задачи (7).

Для вычисления минимального полинома матрицы e^{Ah} удобно использовать представление матрицы \mathbf{A} в блочно-диагональной форме Жордана

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{A}_k & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \mathbf{A}_s \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Тогда матрица e^{Ah} также будет иметь блочно-диагональный вид

$$\Phi = e^{Ah} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \Phi_k & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & \Phi_s \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где $\Phi_k = e^{\mathbf{A}_k h}$.

Количество, размер и структура блоков матрицы \mathbf{A} в форме (9) зависят от собственных чисел матрицы (полюсов объекта диагностирования).

Пользуясь представлением матрицы \mathbf{A} объекта диагностирования в форме Жордана, удобно сформулировать следующие утверждения.

Утверждение 2. Минимальный полином матрицы e^{Ah} для управляемого и наблюдаемого объекта (1), имеющего полюсы $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ с кратностями r_1, \dots, r_s соответственно, равен

$$P(\mu) = \prod_{\omega \in \Omega} (\mu - \omega)^{r(\omega)}, \quad (11)$$

где $\Omega = \{e^{\lambda_1 h}, \dots, e^{\lambda_s h}\}$, $r(\omega) = \max_{j=1}^s \{r_j \mid e^{\lambda_j h} = \omega\}$.

Доказательство:

□ Каждому полюсу λ_j кратности r_j управляемого и наблюдаемого объекта диагностирования (1) соответствует в матрице (9) блок A_j порядка r_j :

$$A_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Соответствующий блок матрицы (10) будет иметь вид

$$\Phi_j = e^{\lambda_j h} \begin{bmatrix} 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \dots & \frac{h^{r_j-1}}{(r_j-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{h^2}{2!} \\ 0 & & & \ddots & h \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Очевидно, что минимальный полином матрицы (12) имеет порядок r_j и равен

$$P_j(\mu) = |\mu I - \Phi_j| = (\mu - e^{\lambda_j h})^{r_j}. \quad (13)$$

Известно, что минимальный полином блочно-диагональной матрицы равен наименьшему общему кратному минимальных полиномов ее диагональных блоков. Таким образом, наименьшее общее кратное полиномов (13) имеет вид (11). ■

Следствие 2.1. Порядок минимального полинома матрицы e^{Ah} для объекта (1) не превышает n .

Следствие 2.2. Если все полюсы объекта (1) вещественны, порядок минимального полинома матрицы e^{Ah} не зависит от величины h и равен n .

Утверждение 3. Порядок минимального полинома матрицы e^{Ah} для объекта (1) может быть меньше n , если и только если среди полюсов объекта найдется пара $\alpha_j + i\beta_j$ и $\alpha_k + i\beta_k$ такая, что $\alpha_j = \alpha_k$.

Доказательство:

□ Согласно утверждению 2, порядок полинома (11) будет меньше n , если и только если после-

довательность $e^{\lambda_1 h}, \dots, e^{\lambda_s h}$ содержит повторяющиеся элементы, т. е. среди полюсов объекта $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ найдется хотя бы одна пара $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ и $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, для которой выполняется условие

$$e^{(\alpha_j + i\beta_j)h} = e^{(\alpha_k + i\beta_k)h}.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$e^{(\alpha_j - \alpha_k)h + i(\beta_j - \beta_k)h} = 1. \quad (14)$$

Поскольку $h > 0$, равенство (14) выполняется, если и только если $\alpha_j - \alpha_k = 0$ и $|\beta_j - \beta_k|h = 2\pi z$, $z \in \mathbb{N}$. ■

Следствие 3.1. Если объект (1) имеет полюс $\alpha_j + i\beta_j$ кратности r_j и полюс $\alpha_k + i\beta_k$ кратности r_k

такие, что $\alpha_j = \alpha_k$, то при $h = \frac{2\pi z}{|\beta_j - \beta_k|}$, $z \in \mathbb{N}$ поряд-

док полинома (11) не превышает $n - \min(r_j, r_k)$.

Следствие 3.2. Если объект диагностирования (1) имеет хотя бы одну пару комплексно-сопряженных полюсов $\alpha_j \pm i\beta_j$ кратности r_j , порядок минимального полинома матрицы e^{Ah} при выборе $h = \frac{\pi z}{\beta_j}$, $z \in \mathbb{N}$, не превышает $n - r_j$.

Таким образом, задача выбора значения h , при котором порядок минимального полинома матрицы e^{Ah} будет наименьшим, носит комбинаторный характер. Ниже предлагается алгоритм ее решения.

Алгоритм расчета тестового комплементарного сигнала с минимальным числом импульсов

Сформулированные утверждения использованы для формирования алгоритма расчета тестового комплементарного сигнала с минимальным числом диагностических импульсов.

Входные данные: матрица A описания объекта диагностирования (1).

Выходные данные: $\gamma_0, \dots, \gamma_m$ — амплитуды диагностических импульсов, h_{\min} — длительность диагностических импульсов.

Шаг 1. Рассчитать собственные числа матрицы A , сгруппировать их по алгебраической кратности и записать их в виде $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \dots, \lambda_s = \alpha_s + i\beta_s$ с кратностями r_1, \dots, r_s .

Шаг 2. Собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ разбить на d групп, где $1 \leq d \leq s$, так, чтобы числа, находящиеся в одной группе, имели одинаковое значение действительной части:

$$(\alpha_1 + \beta_{11}i, \alpha_1 + \beta_{12}i, \dots), \dots, (\alpha_d + \beta_{d1}i, \alpha_d + \beta_{d2}i, \dots).$$

Шаг 3. Множество подходящих значений длительности импульса инициализировать пустым: $H = \emptyset$.

Шаг 4. Для каждой группы собственных чисел, индекс группы $k = 1, \dots, d$, выполнить поиск подходящих значений шага по следующему алгоритму. Обозначим количество чисел в k -й группе как n_k .

Для $k = 1, \dots, d$:

Шаг 4.1. Составить список L всех различных (неупорядоченных) пар мнимых частей собственных чисел, содержащихся в k -й группе:

$$L = \{(\beta_{ki}, \beta_{kj}) : i = 1, \dots, n_k; j = i + 1, \dots, n_k\}.$$

Общее количество пар в списке равно $(n_k^2 - n_k)/2$. Таким образом, если k -я группа содержит только одно число, список L оказывается пустым, и шаги 4.1–4.3 для данного значения k могут быть пропущены.

Шаг 4.2. Разбить список пар на непересекающиеся классы эквивалентности: $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_K$, где $1 \leq K \leq (n_k^2 - n_k)/2$.

Будем называть две пары $(\beta_1, \beta_2), (\beta_3, \beta_4)$ совместимыми, если отношение их разностей — рациональное число:

$$\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_3 - \beta_4} \in \mathbb{Q}.$$

Совместимость задает отношение эквивалентности на множестве пар.

Шаг 4.3. Найти значение длительности импульса h для каждого из классов L_1, \dots, L_K . (Все пары собственных чисел в пределах одного класса эквивалентности совместимы, что означает, что существует такое общее для всего класса значение шага h , которое отобразит каждую пару на одно комплексное число.)

Для $g = 1, \dots, K$:

Шаг 4.3.1. Вычислить модули отношений разностей пар в классе L_g к разности первой пары (отношения по построению являются рациональными числами):

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{|\beta_2 - \beta'_2|}{|\beta_1 - \beta'_1|}, \frac{p_3}{q_3} = \frac{|\beta_3 - \beta'_3|}{|\beta_1 - \beta'_1|}, \dots, \quad (15)$$

где $(\beta_1, \beta'_1), \dots, (\beta_M, \beta'_M)$ — пары мнимых частей собственных чисел в классе эквивалентности L_g , M — количество пар в этом классе; $p_2, \dots, p_M \in \mathbb{Z}$; $q_2, \dots, q_M \in \mathbb{Z}$.

Шаг 4.3.2. Вычислить наименьшее общее кратное z числителей рациональных чисел:

$$z = \text{НОК}(p_2, p_3, \dots, p_M).$$

Если L_g содержит только одну пару, то $z = 1$.

Шаг 4.3.3. Вычислить значение h , которое отображает каждую пару из класса в одну точку:

$$h = \frac{2\pi}{\beta_1 - \beta'_1} z.$$

Шаг 4.3.4. Добавить h во множество H , инициализированное на шаге 3.

Шаг 5. Если $H = \emptyset$, задать $H = \{h\}$, где h — любое.

Шаг 6. Для каждого значения $h \in H$ определить порядок минимального полинома вектора $\mathbf{p}(h) = (e^{Ah} - \mathbf{I})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ для матрицы e^{Ah} . Этот порядок равен рангу матрицы $\mathbf{R}(h) = [\mathbf{p}(h), \Phi\mathbf{p}(h), \dots, \Phi^{n-1}\mathbf{p}(h)]$:

$$r(h) = \text{rank}(\mathbf{R}(h)).$$

Шаг 7. Среди всех $h \in H$ выбрать h_{\min} :

$$h_{\min} = \arg \min_{h \in H} (r(h)).$$

Шаг 8. Рассчитать вектор $[\gamma_m, \dots, \gamma_0]^T$, принадлежащий ядру матрицы

$$\mathbf{R}(h_{\min}) = \left[\mathbf{p}(h_{\min}), \Phi\mathbf{p}(h_{\min}), \dots, \Phi^{r(h_{\min})}\mathbf{p}(h_{\min}) \right],$$

и завершить работу алгоритма.

Замечание 1. Для выполнения последнего шага алгоритма удобно использовать функцию *null* пакета MATLAB.

Замечание 2. При реализации алгоритма следует учесть, что задачи поиска отношений (15) и определения кратности являются плохо обусловленными. В связи с этим максимально возможное количество вычислений необходимо производить в символьном виде при высокой точности задания исходных данных.

Замечание 3. При использовании алгоритма следует учесть, что длительность диагностического импульса, превышающая время переходного процесса или пренебрежимо малая в сравнении с этим временем, является неинформативной с точки зрения контроля дефектов.

Замечание 4. Комплементарный сигнал рассчитывается таким образом, чтобы к моменту времени T вектор состояний объекта диагностирования стал нулевым. Это означает, что дефекты матрицы с выходов объекта (1) являются необнаружимыми данным методом. Расчет комплементарного сигнала производится на основе собственных чисел матрицы \mathbf{A} объекта, матрица \mathbf{b} используется для выбора оптимального сигнала из множества. Таким образом, предложенный алгоритм позволяет расширить класс обнаружи-

мых дефектов для метода Шрайбера, поскольку в случае отличия минимального полинома $p(h_{\min})$ относительно матрицы $e^{Ah_{\min}}$ от минимального полинома матрицы $e^{Ah_{\min}}$ обнаруживаются дефекты не только матрицы A , но и матрицы b .

Примеры терминального контроля технических объектов

Рассмотрим несколько примеров контроля динамических систем методом Шрайбера и проиллюстрируем работу изложенного алгоритма расчета оптимального комплементарного сигнала.

Пример 1. Объект диагностирования четвертого порядка имеет следующие матрицы описания в пространстве состояний (1):

$$A = \begin{bmatrix} -0,1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -0,1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; c = I.$$

Выполним расчет комплементарного сигнала в соответствии с алгоритмом, предложенным в работе [21].

Время переходного процесса составляет около 30 с, следовательно, можно выбрать длительность импульса, например, $h = 2\pi$ [с].

Полюсы объекта диагностирования представляют собой две комплексно-сопряженные пары

$$\lambda_{1,2} = -0,1 \pm i; \lambda_{3,4} = \pm 4i. \tag{16}$$

Этим парам отвечают собственные числа матрицы Φ

$$\mu_{1,2} = e^{-0,1h \pm ih}; \mu_{3,4} = e^{\pm 4ih}.$$

Подставляя $h = 2\pi$ [с], получаем

$$\mu_{1,2} = e^{-0,2\pi \pm 2\pi i} = e^{-\frac{\pi}{5}}; \mu_{3,4} = e^{\pm 2\pi i} = 1.$$

Характеристический полином матрицы Φ имеет порядок 4, его коэффициенты находим по формулам Виета

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= 1; \gamma_1 = -2 - 2e^{-\frac{\pi}{5}}; \gamma_2 = 1 + e^{-\frac{2\pi}{5}} + 4e^{-\frac{\pi}{5}}; \\ \gamma_3 &= -2e^{-\frac{2\pi}{5}} - 2e^{-\frac{\pi}{5}}; \gamma_4 = e^{-\frac{2\pi}{5}}. \end{aligned}$$

Численные значения коэффициентов составляют $\gamma_0 = 1; \gamma_1 \approx -3,067; \gamma_2 \approx 3,419; \gamma_3 \approx -1,636; \gamma_4 \approx 0,285$.

Таким образом, с помощью алгоритма из [21] рассчитан тестовый комплементарный сигнал, содержащий пять импульсов. На рис. 2, а представлены графики комплементарного сигнала и реакции исправного объекта на этот сигнал.

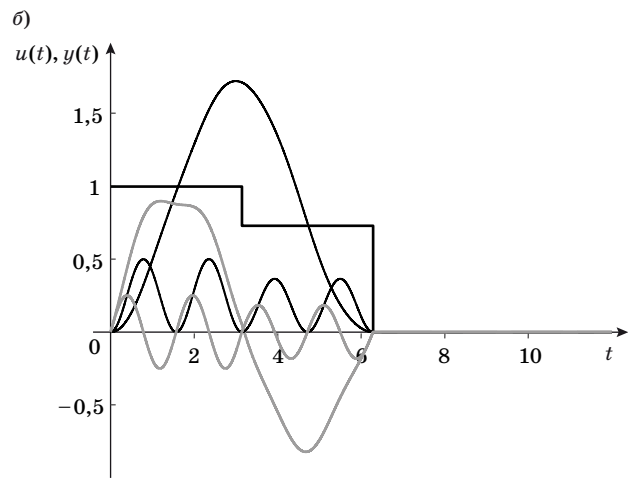
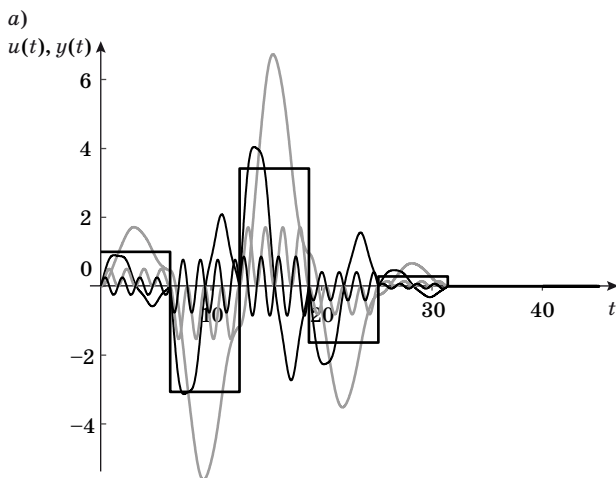
Рассчитаем комплементарный сигнал, содержащий минимальное число импульсов, используя предложенный алгоритм.

Полюсы объекта диагностирования представляют собой две комплексно-сопряженные пары (16), т. е. на шаге 2 получаем две группы $(-0,1 + i; -0,1 - i), (4i; -4i)$.

На шаге 4 для первой группы получаем список $L = \{(i, -i)\}$. Список содержит единственную пару, для которой вычисляем $h_1 = \pi$ [с].

Для второй группы получаем $L = \{(4i, -4i)\}, h_2 = \pi/4$ [с].

Определим порядок минимального полинома вектора $p(h)$ для каждого значения h .



■ **Рис. 2.** Реакция исправного объекта на комплементарный сигнал из пяти (а) и двух (б) импульсов
 ■ **Fig. 2.** Fault-free object response to a complementary signal of five (a) and two (б) pulses

При $h_1 = \pi$ [с] получаем

$$R(h_1) = \begin{bmatrix} 1,7117 & -1,2503 & 0,9132 & -0,6670 \\ 0,0561 & -0,0409 & 0,0299 & -0,0218 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$r(h_1) = 1.$$

При $h_2 = \pi/4$ [с]

$$R(h_2) = \begin{bmatrix} 0,3232 & 0,6384 & 0,5640 & 0,1862 \\ 0,7911 & 0,0867 & -0,1414 & -0,6803 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$r(h_2) = 3.$$

Наименьший порядок минимального полинома равен 1 и достигается при $h = \pi$ [с]. На шаге 8 получаем $\gamma_0 = 1; \gamma_1 = e^{-\frac{\pi}{10}}$.

Численные значения коэффициентов составляют $\gamma_0 = 1; \gamma_1 \approx 0,73$.

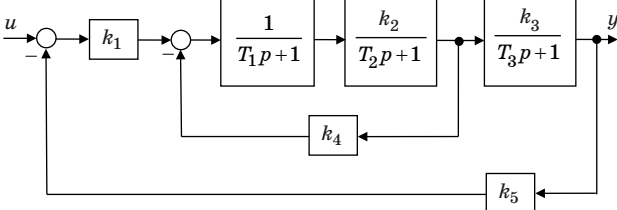
На рис. 2, б приведены графики соответствующего комплементарного сигнала, содержащего два импульса, и реакции исправного объекта на этот сигнал.

Таким образом, предложенный алгоритм позволил рассчитать комплементарный сигнал для диагностирования объекта четвертого порядка, содержащий всего два импульса длительностью π [с].

Пример 2. На рис. 3 показана структурная схема автоматизированного электропривода постоянного тока.

Номинальные значения параметров электропривода составляют $k_1 = 2; k_2 = 35,2; k_3 = 0,512; k_4 = 1,8; k_5 = 0,016; T_1 = 0,5; T_2 = 0,44; T_3 = 0,2$.

Для описания объекта в пространстве состояний (1) в качестве переменных состояния выберем выходные сигналы аperiодических звеньев. Тогда структурной схеме (см. рис. 3) будет соответствовать описание в пространстве состояний (1) с матрицами



■ Рис. 3. Структурная схема электропривода
 ■ Fig. 3. The block diagram of the electric drive

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & -\frac{k_4}{T_1} & -\frac{k_1 k_5}{T_1} \\ \frac{k_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} & 0 \\ 0 & \frac{k_3}{T_3} & -\frac{1}{T_3} \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad c = [0 \ 0 \ 1].$$

На основании импульсной характеристики электропривода (рис. 4) можно предположить, что для контроля электропривода методом Шрайбера целесообразно выбрать длину импульса h в диапазоне от 0,1 до 1,7 с.

Для расчета комплементарного сигнала воспользуемся предложенным алгоритмом.

Электропривод имеет один вещественный полюс $\lambda_1 = -5,0442$ и комплексно-сопряженную пару полюсов $\lambda_{2,3} = -2,1142 \pm 16,9738i$. На шаге 2 получаем две группы полюсов $(-5,0442), (-2,1142 + 16,9738i; -2,1142 - 16,9738i)$.

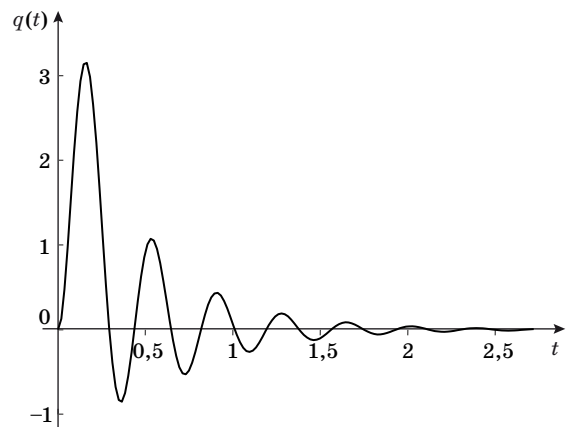
Первая группа содержит только одно число, поэтому, согласно алгоритму, переходим к рассмотрению второй группы.

Для второй группы получаем список $L = \{(16,9738i; -16,9738i)\}$. Список содержит единственную пару, для которой вычисляем

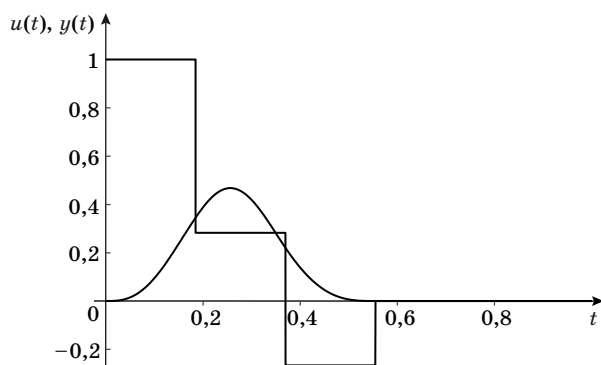
$$h = \frac{2\pi}{2 \cdot 16,9738} \approx 0,185 \text{ с.}$$

Определим порядок минимального полинома вектора $p(h)$:

$$R(h) = \begin{bmatrix} 0,0513 & -0,0345 & -0,0158 \\ 1,8273 & -1,2417 & -0,5670 \\ 0,3451 & 0,1219 & 0,0162 \end{bmatrix}; \quad r(h) = 2.$$



■ Рис. 4. Импульсная весовая характеристика электропривода
 ■ Fig. 4. Impulse response of the electric drive



■ **Рис. 5.** Реакция исправного электропривода на комплементарный сигнал

■ **Fig. 5.** Fault-free electric drive response to a complementary signal

Порядок минимального полинома равен двум. На шаге 8 получаем следующие значения коэффициентов: $\gamma_0 = 1$; $\gamma_1 \approx 0,283$; $\gamma_2 \approx -0,2658$.

Графики полученного комплементарного сигнала и реакции исправного объекта на этот сигнал представлены на рис. 5.

Евклидова норма выходного сигнала исправного объекта на интервале $3h \leq t \leq 6h$ составляет $6,2533 \cdot 10^{-5}$.

Рассмотрим следующие однократные дефекты электропривода:

№ 1–5 — увеличение на 20 % коэффициента усиления k_1, \dots, k_5 соответственно;

№ 6–8 — увеличение на 20 % постоянной времени T_1, \dots, T_3 соответственно.

Будем поочередно вносить в объект диагностирования указанные однократные дефекты, подавать на объект комплементарный сигнал (см. рис. 5) и рассчитывать евклидову норму выходного сигнала на интервале $3h \leq t \leq 6h$. Результаты расчетов представлены в таблице.

Номер дефекта	$\ y(t)\ _{3h \leq t \leq 6h}$	Номер дефекта	$\ y(t)\ _{3h \leq t \leq 6h}$
1	0,1775	5	0,148
2	38,5157	6	49,6201
3	0,1775	7	49,986
4	32,021	8	17,9484

При наличии каждого из дефектов норма выходного сигнала на контрольном интервале существенно отлична от нуля по сравнению с нормой выходного сигнала исправного объекта. Это означает, что все рассмотренные дефекты являются диагностируемыми с помощью построенного комплементарного сигнала.

Заключение

В статье рассмотрена задача минимизации числа тестовых импульсов при диагностировании управляемых и наблюдаемых линейных динамических систем методом Шрайбера за счет выбора длительности импульса. Произведено математическое описание множества комплементарных тестовых сигналов.

Сформулирована задача оптимизации на описанном множестве. Сформулированы и доказаны утверждения о минимальном числе тестовых импульсов для управляемого и наблюдаемого линейного объекта диагностирования. Описан соответствующий алгоритм расчета комплементарного сигнала с минимальным числом импульсов. Работоспособность алгоритма проиллюстрирована на примерах.

Полученные результаты могут быть использованы для поиска неисправностей динамических объектов, допускающих линейное описание, в частности, электрических цепей, механических систем, систем автоматического управления и др.

В качестве направлений для дальнейшего исследования можно указать две задачи. Первая состоит в обобщении полученных результатов на более широкие классы объектов диагностирования, в частности, на неуправляемые и ненаблюдаемые объекты. Вторая — в оптимальном выборе длительности импульса в случае, когда минимизация числа импульсов тестового сигнала за счет выбора длительности импульса невозможна или нецелесообразна.

Финансовая поддержка

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-08-00244).

Литература

1. Мальцев Г. Н., Назаров А. В., Якимов В. Л. Имитационное моделирование процесса диагностирования сложной технической системы с высоким уровнем автономности функционирования. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 4, с. 34–43. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.4.34

2. Жирабок А. Н., Шумский А. Е., Павлов С. В. Диагностирование линейных динамических систем непараметрическим методом. *Автоматика и телемеханика*, 2017, № 7, с. 3–21.

3. **Аксенова Г. П.** Локализация кратных неисправностей при групповом контроле в дискретном устройстве. *Автоматика и телемеханика*, 2017, № 12, с. 118–130.
4. **Ягодников Д. А., Рудинский А. В.** Диагностика ракетных и реактивных двигателей по характеристикам собственного электромагнитного поля продуктов сгорания. *Теплофизика высоких температур*, 2017, № 5, с. 828–845.
5. **Козырев Г. И., Хамагов А. А., Лоскутов А. И., Клыков В. А.** Диагностирование бортовой аппаратуры космических аппаратов на основе нечеткой логики. *Нечеткие системы и мягкие вычисления*, 2018, № 2, с. 126–146. doi:10.26456/fssc43
6. **Prakash O., Samantaray A. K., Bhattacharyya R.** Model-based diagnosis of multiple faults in hybrid dynamical systems with dynamically updated parameters. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, no. 6, pp. 1053–1072. doi:10.1109/TSMC.2017.2710143
7. **Gautam S., Tamboli P. K., Patankar V. H., Roy K., Duttagupta S. P.** Sensors incipient fault detection and isolation using Kalman filter and Kullback — Leibler divergence. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2019, no. 5, pp. 782–794. doi:10.1109/TNS.2019.2907753
8. **Su J., Chen W.** Model-based fault diagnosis system verification using reachability analysis. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, no. 4, pp. 742–751. doi:10.1109/TSMC.2017.2710132
9. **Jeong H., Park B., Park S., Min H., Lee S.** Fault detection and identification method using observer-based residuals. *Reliability Engineering and System Safety*, 2019, vol. 184, pp. 27–40. doi:10.1016/j.res.2018.02.007
10. **Zarch M. G., Puig V., Poshtan J., Shoorehdeli M. A.** Fault detection and isolation using viability theory and interval observers. *International Journal of Systems Science*, 2018, no. 7, pp. 1445–1462. doi:10.1080/00207721.2018.1454536
11. **Lan J., Patton R. J.** A new strategy for integration of fault estimation within fault-tolerant control. *Automatica*, 2016, vol. 69, pp. 48–59. doi:10.1016/j.automatica.2016.02.014
12. **Zhang Z., Li S., Yan H., Fan Q.** Sliding mode switching observer-based actuator fault detection and isolation for a class of uncertain systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2019, vol. 33, pp. 322–335. doi:10.1016/j.nahs.2019.04.001
13. **Li J., Pan K., Zhang D., Su Q.** Robust fault detection and estimation observer design for switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2019, vol. 34, pp. 30–42. doi:10.1016/j.nahs.2019.05.001
14. **Åslund J., Frisk E., Jung D.** Asymptotic behavior of a fault diagnosis performance measure for linear systems. *Automatica*, 2019, vol. 106, pp. 143–149. doi:10.1016/j.automatica.2019.04.041
15. **Kammammettu S., Li Z.** Change point and fault detection using Kantorovich distance. *Journal of Process Control*, 2019, vol. 80, pp. 41–59. doi:10.1016/j.jprocont.2019.05.012
16. **Saucedo-Dorantes J. J., Delgado-Prieto M., Romero-Troncoso R. D. J., Osornio-Rios R. A.** Multiple-fault detection and identification scheme based on hierarchical self-organizing maps applied to an electric machine. *Applied Soft Computing Journal*, 2019, vol. 81. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.105497> (дата обращения: 24.06.2019). doi:10.1016/j.asoc.2019.105497
17. **Hatem N. R. B., Mostefai M., El Kheir Aktouf O.** Extended Kalman observer based sensor fault detection. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 2019, vol. 9, no. 3, pp. 1546–1552. doi:10.11591/ijece.v9i3.pp1546-1552
18. **Han H., Cui X., Fan Y., Qing H.** Least squares support vector machine (LS-SVM)-based chiller fault diagnosis using fault indicative features. *Applied Thermal Engineering*, 2019, vol. 154, pp. 540–547. doi:10.1016/j.applthermaleng.2019.03.111
19. **Бритов Г. С.** Терминальное диагностирование динамических систем. *Информационно-управляющие системы*, 2017, № 4, с. 18–24. doi:10.15217/issn1684-8853.2017.4.18
20. **Schreiber H. H.** Fault dictionary based upon stimulus design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1979, vol. CAS-26, no. 7, pp. 529–537.
21. **Мироновский Л. А.** Диагностирование линейных систем методом комплементарного сигнала. *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика*, 2002, № 5, с. 52–57.

UDC 681.518.5

doi:10.31799/1684-8853-2019-6-12-21

Fault detection optimization for controllable dynamic systemsL. A. Mironovsky^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0003-3584-7095T. N. Solov'eva^a, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-6371-8373, al2tn@yandex.ruD. V. Shintyakov^a, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-7950-0694^aSaint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: When diagnosing the deviations of controllable dynamic system parameters, it is convenient in terms of control simplicity to apply the Schreiber method which uses a set of rectangular pulses of equal duration as a test signal. Since for a single object you can construct many test signals which differ in the number of pulses, the problem arises how to minimize the number of test pulses when using the Schreiber method. **Purpose:** Simplification of test control and diagnostics of linear controllable dynamic systems. **Results:** It has been shown that a set of test pulse amplitude vectors is a kernel of the controllability matrix of a discrete analogue of the object under test. The problem is formulated of finding the optimal length of a test pulse in order to minimize the number of pulses in the test signal. For a given pulse length, the pulse amplitudes of an optimal test signal are equal to the coefficients of the control vector minimal polynomial for the discrete analog of the object relative to its system matrix. The number of test pulses can be reduced by choosing the pulse duration calculated from the imaginary component of the object poles. In particular, if an object has at least one pair of complex-conjugate poles, the number of test pulses does not at least exceed the order of the object. An algorithm has been developed for calculating a test signal for linear controllable object FDI by the Schreiber method. The input to the algorithm is the system matrix of the object, and the output is the length of the test pulse and the pulse amplitude vector. The efficiency of the algorithm is illustrated by FDI for two technical objects. **Practical relevance:** The results of the study can be applied to static parameter FDI of controllable dynamical objects which allow a linear description in their state space.

Keywords — FDI, control, diagnostics, Schreiber method, complementary signal, minimal polynomial, optimization.

For citation: Mironovsky L. A., Solov'eva T. N., Shintyakov D. V. Fault detection optimization for controllable dynamic systems. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 6, pp. 12–21 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-6-12-21

References

- Maltsev G. N., Nazarov A. V., Yakimov V. L. Simulation modeling of diagnostics of a highly autonomous complex technical system. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2016, no. 4, pp. 34–43 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.4.34
- Zhurabok A. N., Shumsky A. E., Pavlov S. V. Diagnosis of linear dynamic systems by the nonparametric method. *Automation and Remote Control*, 2017, no. 7, pp. 1173–1188 (In Russian). doi:10.1134/S0005117917070013
- Aksenova G. P. Localization of multiple faults with group control on a discrete device. *Automation and Remote Control*, 2017, no. 12, pp. 2193–2202 (In Russian). doi:10.1134/S0005117917120074
- Yagodnikov D. A., Rudinskii A. V. Diagnostics of rocket and jet engines through characteristics of the intrinsic electromagnetic field of combustion products. *High Temperature*, 2017, no. 5, pp. 808–824 (In Russian). doi:10.1134/S0018151X17050200
- Kozyrev G. I., Khamatov A. A., Klykov V. A., Loskutov A. I. Diagnostics on-Board equipment of spacecrafts on the basis of fuzzy logic. *Fuzzy Systems and Soft Computing*, 2018, no. 2, pp. 126–146 (In Russian). doi:10.26456/fssc43
- Prakash O., Samantaray A. K., Bhattacharyya R. Model-based diagnosis of multiple faults in hybrid dynamical systems with dynamically updated parameters. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, no. 6, pp. 1053–1072. doi:10.1109/TSMC.2017.2710143
- Gautam S., Tamboli P. K., Patankar V. H., Roy K., Duttagupta S. P. Sensors incipient fault detection and isolation using Kalman filter and Kullback — Leibler divergence. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 2019, no. 5, pp. 782–794. doi:10.1109/TNS.2019.2907753
- Su J., Chen W. Model-based fault diagnosis system verification using reachability analysis. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, no. 4, pp. 742–751. doi:10.1109/TSMC.2017.2710132
- Jeong H., Park B., Park S., Min H., Lee S. Fault detection and identification method using observer-based residuals. *Reliability Engineering and System Safety*, 2019, vol. 184, pp. 27–40. doi:10.1016/j.ress.2018.02.007
- Zarch M. G., Puig V., Poshtan J., Shoorehdeli M. A. Fault detection and isolation using viability theory and interval observers. *International Journal of Systems Science*, 2018, no. 7, pp. 1445–1462. doi:10.1080/00207721.2018.1454536
- Lan J., Patton R. J. A new strategy for integration of fault estimation within fault-tolerant control. *Automatica*, 2016, vol. 69, pp. 48–59. doi:10.1016/j.automatica.2016.02.014
- Zhang Z., Li S., Yan H., Fan Q. Sliding mode switching observer-based actuator fault detection and isolation for a class of uncertain systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2019, vol. 33, pp. 322–335. doi:10.1016/j.nahs.2019.04.001
- Li J., Pan K., Zhang D., Su Q. Robust fault detection and estimation observer design for switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2019, vol. 34, pp. 30–42. doi:10.1016/j.nahs.2019.05.001
- Åslund J., Frisk E., Jung D. Asymptotic behavior of a fault diagnosis performance measure for linear systems. *Automatica*, 2019, vol. 106, pp. 143–149. doi:10.1016/j.automatica.2019.04.041
- Kammammettu S., Li Z. Change point and fault detection using Kantorovich distance. *Journal of Process Control*, 2019, vol. 80, pp. 41–59. doi:10.1016/j.jprocont.2019.05.012
- Saucedo-Dorantes J. J., Delgado-Prieto M., Romero-Troncoso R. D. J., Osornio-Rios R. A. Multiple-fault detection and identification scheme based on hierarchical self-organizing maps applied to an electric machine. *Applied Soft Computing Journal*, 2019, vol. 81. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2019.105497> (accessed 24 June 2019). doi:10.1016/j.asoc.2019.105497
- Hatem N. R. B., Mostefai M., El Kheir Aktouf O. Extended Kalman observer based sensor fault detection. *International Journal of Electrical and Computer Engineering*, 2019, vol. 9, no. 3, pp. 1546–1552. doi:10.11591/ijece.v9i3.pp1546-1552
- Han H., Cui X., Fan Y., Qing H. Least squares support vector machine (LS-SVM)-based chiller fault diagnosis using fault indicative features. *Applied Thermal Engineering*, 2019, vol. 154, pp. 540–547. doi:10.1016/j.applthermaleng.2019.03.111
- Britov G. S. Terminal diagnostics of discrete dynamical systems. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2017, no. 4, pp. 18–24 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2017.4.18
- Schreiber H. H. Fault dictionary based upon stimulus design. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1979, vol. CAS-26, no. 7, pp. 529–537.
- Mironovsky L. A. FDI of linear systems using the complementary signal method. *Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics*, 2002, no. 5, pp. 52–57 (In Russian).