УДК 519.61:511-33

МАТРИЦЫ ЛОКАЛЬНОГО МАКСИМУМА ДЕТЕРМИНАНТА

Н. А. Балонин[a]*, доктор техн. наук, профессор*
М. Б. Сергеев[a]*, доктор техн. наук, профессор*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Постановка проблемы: *основные обобщения матриц Адамара связывают с матрицами максимального детерминанта или с не оптимальными по детерминанту матрицами с ортогональными столбцами; квазиортогональные матрицы локального максимума детерминанта изучены недостаточно полно. Целью работы является обзор теории таких матриц по результатам предварительных исследований.* ***Методы:*** *экстремальные решения ищутся минимизацией максимума абсолютных значений элементов исследуемых матриц с последующей классификацией их по количеству и значениям уровней, зависящих от порядков.* ***Результаты:*** *обосновывается предположение, что существует всего пять нетривиальных малоуровневых строго оптимальных матриц нечетных порядков, меньших 13. Выделены и описаны функциями веса основные типы квазиортогональных матриц локального максимума детерминанта (М-матриц), включающие матрицы Мерсенна, Ферма и Эйлера. Сформулировано предположение о существовании всех матриц Мерсенна нечетных порядков. Рассмотрен вопрос существования матриц Мерсенна и Адамара. Приведен пример аппроксимации матрицы Адамара 668-го порядка блочным массивом с матрицами Вильямсона на основе матриц Мерсенна. Приведены графики, описывающие зависимость детерминантов М-матриц от порядка.* ***Практическая значимость:*** *алгоритмы нахождения М-матриц использованы при построении исследовательского программного комплекса. Субоптимальные по детерминанту матрицы составляют основу фильтров Мерсенна и Ферма, применяемых для сжатия и маскирования изображений.*

Ключевые слова *— ортогональные матрицы, матрицы Адамара, матрицы Белевича, матрицы Мерсенна, матрицы Ферма, матрицы Эйлера, гипотеза Адамара.*

Введение

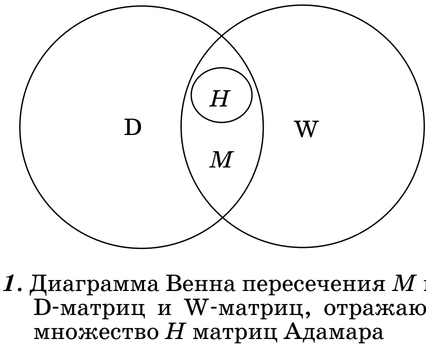
В работе авторов [1] была сформулирована задача о нахождении некоторых аналогов матриц Адамара (М-матриц) на четных и нечетных порядках. Позднее опубликованы [2—10] результаты, развивающие положения постановочной статьи.

В 1893 г. Адамар обнаружил у матриц Сильвестра (1867) [11] с элементами {1, –1} и порядков $n=2^k$, где k — здесь и далее (если не оговорено) — целое число, свойство совмещать в себе два качества [12]: они имеют максимальный детерминант на широком классе матриц с элементами, не большими по модулю единицы; они квазиортогональны, т. е. строго ортогональны после нормирования их столбцов. Среди обобщений матриц Адамара часто встречаются следующие два. Первое связано с матрицами (не ортогональными по столбцам), обладающими максимальным значением детерминанта. Второе — с матрицами, называемыми взвешенными, обладающими расширенным (для обеспечения ортогональности столбцов) составом элементов {0, 1, –1}.

Определение 1. Значения, которым равны элементы матрицы, будем называть ее уровнями. Например, матрица Адамара [12] с элементами {1, –1} имеет два уровня (двухуровневая), а матрица Белевича [13] с элементами {0, 1, –1} — трехуровневая.

Квазиортогональные обобщенные матрицы Адамара с элементами, не большими по модулю единицы, лежат на пересечении M двух классов (рис. 1): D-матриц абсолютного максимума детерминанта (не ортогональных по столбцам) и квазиортогональных W-матриц (безотносительных к оптимуму детерминанта) с некоторым, желательно небольшим, количеством уровней. Классические матрицы Адамара образуют на пересечении D-матриц и W-матриц подмножество H всех матриц с единичными по модулю элементами.

Проблема обобщения состоит в том, что матрицы класса H существуют не для всех значений порядков n. Соответственно, возникает дополнительная задача поиска квазиортогональных матриц с максимальным значением детерминанта, т. е. матриц класса M, к которому принадлежат некоторые известные квазиортогональные матрицы, например, часть матриц Белевича. Количество уровней матриц класса M в общем



■ ***Рис. 1.*** Диаграмма Венна пересечения M множеств D-матриц и W-матриц, отражающая подмножество H матриц Адамара неизвестно и должно быть определено для каждого порядка, отличного от порядков двухуровневых матриц Адамара. Детерминант — непрерывная функция от элементов матрицы, имеющая не только глобальный, но и локальные максимумы. Более широкими обобщениями матриц Адамара следует считать квазиортогональные матрицы, обладающие либо глобальным, либо локальным максимумом детерминанта.

Такая постановка задачи на поиск обобщений, несмотря на более чем столетнюю историю матриц Адамара, нова и в силу ее сложности исследована и представлена в публикациях недостаточно полно. Целью настоящей работы является обзор, которым будет показана особая роль матриц локального максимума детерминанта.

Квазиортогональные матрицы и значение их детерминанта

Согласно *теореме Адамара*, $|\det(\mathbf{A})| \le n^{n/2}$ для всех матриц **A** с элементами, не большими по модулю единицы. Равенство достижимо только на матрицах Адамара **H** с их экстремально малым количеством уровней при экстремально большом детерминанте.

Определение 2. Квазиортогональной будем называть квадратную матрицу **A** порядка n с приведенными к единице максимумами модулей элементов каждого из столбцов, удовлетворяющую квадратичному условию связи

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \omega\mathbf{I},$$

где **I** — единичная матрица; ω — вес матрицы.

Вес $\omega = 1$ характерен для ортогональных матриц, к которым квазиортогональные матрицы и, в частности, матрицы Адамара, помимо тривиальной матрицы первого порядка, не относятся. Вместе с тем эти матрицы весьма близки к ортогональным, получаемым из **A** элементарным нормированием их столбцов, после чего максимальный по модулю элемент (m-норма) уменьшается до $m < 1$ для порядков $n > 1$.

Определение 3. Минимаксными квазиортогональными М-матрицами в строгом смысле будем называть матрицы, обладающие минимумом m-нормы на классе квазиортогональных матриц порядка n.

Несложно заметить, что $|\det(\mathbf{A})| = \omega^{n/2}$, причем $\omega = 1/m^2$.

Матрица Адамара **H**, обладающая максимумом детерминанта, имеет минимальное значение $m = 1/\sqrt{n}$, т. е. является частным случаем М-матриц с весом $\omega = n$.

На многих порядках завышенная неравенством Адамара верхняя граница значения модуля детерминанта не достижима в принципе, поэтому для них матриц Адамара не существует. Отсутствие оптимального решения искусственное, поскольку возможен поиск достижимого максимума модуля детерминанта, т. е. М-матрицы.

Определение 4. Минимаксными квазиортогональными М-матрицами в общем смысле будем называть матрицы, обладающие глобальным или локальным минимумом m-нормы на классе квазиортогональных матриц порядка n.

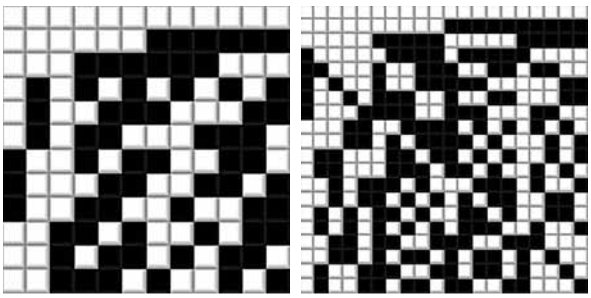
Такие М-матрицы более широко определены, они обладают глобальным или локальным максимумом модуля детерминанта.

Определение 5. Адамаровой нормой (h-нормой, взвешенной m-нормой) матрицы будем называть показатель $h = m\sqrt{n}$.

Адамарова норма отражает близость матрицы к матрице Адамара, у которой она имеет минимально возможное значение $h = 1$. Модуль детерминанта квазиортогональной матрицы $|\det(\mathbf{A})| = 1/m^n = n^{n/2}/h^n$ включает в себя правую часть неравенства Адамара $n^{n/2}$, пониженную до достижимой величины делением на n-ю степень h-нормы. Вопрос существования М-матриц решается значительно проще, чем для классических матриц Адамара, что видится естественным, поскольку первые должны их обобщить. Однако отсюда следуют и более далеко идущие выводы, позволяющие иначе подойти к оценке факта существования классических матриц на порядках, кратных четырем.

Предположение Пэли (гипотеза Адамара)

То, что матрицы Адамара существуют для порядков n, равных 1, 2 и всех кратных четырем, предположил Пэли [14], наблюдая, что алгоритмы их вычисления дают пересекающиеся, но не совпадающие между собой множества матриц. С пары новых матриц 12-го и 20-го порядков (рис. 2), отличных от сильвестровых, начинал Адамар [12], пояснив ими необходимое условие $n = 4k$ для нахождения квазиортогональных матриц с элементами {1, –1}. Здесь и далее белый



■ ***Рис. 2.*** Матрицы Адамара $\mathbf{H}_{12}$ и $\mathbf{H}_{20}$, отличающиеся от сильвестровых квадрат портрета матрицы соответствует элементу 1, черный — элементу –1.

Позднее Скарпи [15] нашел не пару, а множество матриц порядков, указанных Адамаром [12], не вычислимых по правилу Сильвестра [11]. Следом Пэли разработал несколько алгоритмов. Матрицы двух его базовых конструкций [14] включают две матрицы Адамара $\mathbf{H}_{12}$ и $\mathbf{H}_{20}$ (они выглядят иначе), но отличаются в общем от матриц Сильвестра и Скарпи. Отсюда вывод Пэли: любую матрицу допустимого порядка $n=4k$, видимо, можно найти, предложив некоторый новый алгоритм их вычисления.

Начиная с конструкций Пэли, методы нахождения новых матриц включают в себя переборные алгоритмы, что при современной скорости вычислителей не позволяет найти уже в первой тысяче матриц, например, матрицы Адамара порядков 668, 716 и 892.

Таким образом, предположение Пэли, называемое также *гипотезой Адамара* (*Hadamard conjecture*), считается недоказанным.

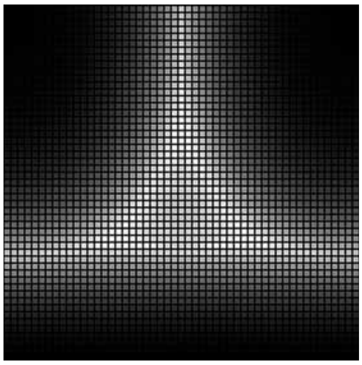
Квазиортогональные матрицы максимального детерминанта

Рассмотрим строго минимаксные М-матрицы, т. е. квазиортогональные и обладающие глобальным максимумом модуля детерминанта [1].

Общий подход в их построении заключается в минимизации m-нормы, поскольку $|\det(\mathbf{A})|=\omega^{n/2}$ при $\omega=1/m^2$. Для нахождения оптимальной матрицы следует на множестве ортогональных матриц соответствующего порядка найти ту, которая обладает минимумом максимума абсолютного значения элемента. Например, на втором порядке это будут ортогональные матрицы Эйлера двумерного поворота на угол α с варьируемыми элементами $\cos(\alpha)$ и $\sin(\alpha)$ в первом столбце. Второй столбец содержит их же, но в обратном порядке, причем знак при синусе изменен.

Функция $|\det(\mathbf{A})|=1/m^2$, где $m=\max\{\sin(\alpha), \cos(\alpha)\}$, при $0\le\alpha\le 2\pi$ имеет максимальное значение 2, соответствующее модулю детерминанта квазиортогональной матрицы Адамара. Она получается, например, из оптимальной матрицы Эйлера делением ее на m-норму, соответствующую экстремальному углу поворота $\alpha=\pi/4$.

Случай матрицы третьего порядка немногим сложнее. Детерминант ее — функция трех углов Эйлера α, β, γ поворота трехмерного базиса в трехмерном пространстве. Как и в предыдущем случае, для управления ориентацией первого вектор-столбца хватает меньшего числа углов (двух), остальные два вектора занимают подчиненное положение. Из всех возможных их ориентаций выбираем те, которые дают максимум m-нормы. Для нахождения минимаксной матрицы остается найти минимум отмеченного максимума. Не останавливаясь на деталях геометрического построения, представим фрагмент зависимости функции $|\det(\mathbf{A})|$ от двух ведущих углов в районе сосредоточения ее экстремумов: угловые координаты α, β задают ширину и высоту рисунка, а величина значения модуля детерминанта отражена насыщенностью точек белого цвета (рис. 3).



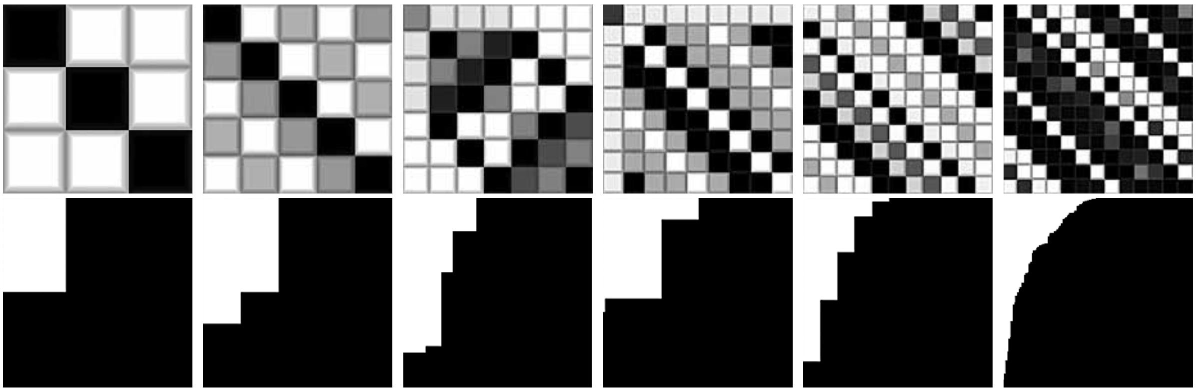
■ ***Рис. 3.*** Зависимость $|\det(\mathbf{A})|$ в системе угловых координат α, β

Судя по второму порядку, глобальный экстремум модуля детерминанта матриц Адамара выражен достаточно ясно. По сравнению с ними у матриц нечетного порядка на месте потенциального максимума наблюдается локальный минимум вследствие отмеченной оптимизации положения подчиненных векторов базиса, влияющих на m-норму. Особенность геометрических пространств размерностей, кратных четырем, состоит в том, что зависимые векторы на максимум не влияют. Максимум не смещен, расположен по центру, и такая матрица имеет все равные между собой координаты: матрица Адамара — это модульно одноуровневая матрица.

Оптимальные матрицы нечетных порядков соответствуют смещенному положению максимума. Он наиболее смещен для матрицы третьего порядка $\mathbf{A}_3$ так, что одна из трех координат ортогонального базиса убывает вдвое. Таких вариантов несколько, они эквивалентны друг другу по значению модуля детерминанта. На рис. 3 варианты решения видны в виде трех вершин одинаковой яркости, образуемых центральным понижением на трех ведущих к центру гребнях функции $|\det(\mathbf{A})|$. Вид матрицы, эквивалентной всем тем решениям, приведем ниже.

Предположение о малоуровневых М-матрицах

Матрицу-элемент первого порядка $\mathbf{A}_1=1$ отнесем к тривиальным одноуровневым, она начинает последовательность Сильвестра двухуровневых матриц Адамара.



■ ***Рис. 4.*** Портреты матриц $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_7$, $\mathbf{A}_9$, $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{13}$ с гистограммами модулей элементов

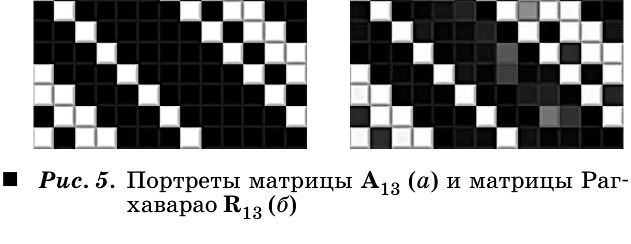
Определение 6. Малоуровневыми квазиортогональными матрицами назовем такие, количество модульных уровней которых превосходит $K=(n+1)/2$ не более чем на 1.

Например, матрица $\mathbf{A}_3$ — малоуровневая М-матрица, число ее уровней, в соответствии с оценочной формулой и построением выше, равно двум.

Предположение 1. Существует только пять нетривиальных малоуровневых строго минимаксных М-матриц нечетного порядка $n<13$.

Для иллюстрации приведем пять оптимальных матриц $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_7$, $\mathbf{A}_9$, $\mathbf{A}_{11}$, сопоставляя их между собой и с многоуровневой матрицей $\mathbf{A}_{13}$ по структуре портретов и количеству модульных уровней на гистограммах (рис. 4).

Три малоуровневые матрицы $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_{11}$ сводятся к циклическим, количество их модульных уровней оценивается как $K=(n+1)/2$. Промежуточная пара $\mathbf{A}_7$, $\mathbf{A}_9$ имеет на единицу отличное от K количество уровней. Модули уровней $\mathbf{A}_3$ относятся друг к другу в пропорциях 1:2, $\mathbf{A}_5$ — в пропорциях 2:3:6, уровни остальных матриц иррациональны. Многоуровневая матрица $\mathbf{A}_{13}$ (рис. 5, *а*) близка по матричному ее портрету к двухуровневой циклической D-матрице Рагхаварао $\mathbf{R}_{13}$ (рис. 5, *б*) [16] абсолютного максимума детерминанта. Ортогонализация столбцов $\mathbf{R}_{13}$ с сохранением оптимальности достигается утратой цикличности (но не симметрии относительно побочной диагонали) при значительном превышении количеством уровней значения K.



■ ***Рис. 5.*** Портреты матрицы $\mathbf{A}_{13}$ (*а*) и матрицы Рагхаварао $\mathbf{R}_{13}$ (*б*)

Ортогональный базис — некоторое простое первичное понятие. Зависимость числа уровней квазиортогональной М-матрицы от порядка — фундаментальная характеристика «вмещаемости» пространства. Это, скорее, атрибут самого пространства, чем матрицы. Исходя из гипотезы Адамара зависимость эта плохо изучена — нет сформировавшегося мнения относительно не только всем хорошо известных матриц Адамара, но и остальных минимаксных матриц. С ростом размерности различие между соседними пространствами убывает, но для начальных пространств наблюдается кризисный 13-й порядок.

Геометрический анализ позволяет предположить, что смещающий глобальный максимум модуля детерминанта локальный минимум с ростом порядка утрачивает свое доминирование. Увеличивается общее количество локальных минимумов и максимумов, их значения сближаются между собой. Задача поиска экстремальной матрицы на плато становится все более плохо обусловленной, возникает много почти не отличимых по детерминанту матриц. Но и это еще не предел неопределенности. Линейное возрастание числа уровней «бифуркциями» и наличие критической точки (на порядке 13) отвечает воззрениям, сложившимся в теории детерминированного хаоса [1].

Значение h-нормы $\mathbf{A}_{13}$ предложено [1] считать базовой константой $B=m13^{1/2}$, где $m\cong 0{,}31$, т. е. $B\cong 0{,}31\cdot 13^{1/2}=1+\delta=1{,}117\ldots$. Это не столько показатель этой именно матрицы, сколько интегральный параметр слоя «хаотических» матриц, к которому матрица тринадцатого порядка принадлежит. Матрицы Адамара и их обобщения представляют аттракторы итерационных алгоритмов вычисления минимаксных матриц (фракталы). Сходство с константой Фейгенбаума F константы B состоит в ее универсализме: независимо от порядка итерациям свойственно зацикливаться на матрицах с h-нормами, большими B [1]. Решение с h при $B > h \geq 1$ представляет собой интерес как «информативная» матрица. Информативность матриц будем оценивать по показателю $I = \lg(h - \delta)/\lg(1 - \delta)$. У матриц Адамара он положителен и достигает максимума — единицы, низкая информативность $\mathbf{A}_{13}$ принята за эталон, у всех таких матриц она в точности или приближенно равна нулю.

Обратим внимание, что относительно легко находимые начальные М-матрицы до двенадцатого порядка включительно имеют приведенную норму h выше константы B. Далее начинаются серьезные проблемы поиска таких матриц.

Концепция матриц локального максимума детерминанта

Рассмотрим М-матрицы в широком их понимании, как квазиортогональные матрицы глобального и локального максимумов детерминанта, представляющие собой частные проявления некоторого единого математического объекта.

Определение 7. Слоем будем называть М-матрицы, определенные с помощью функции веса $\omega(n)$ на порядках $n = 4k + d$, где d — фиксированное целое значение $0 \leq d < 4$.

Если идентифицирована связывающая М-матрицы от порядка к порядку зависимость $\omega(n)$ без особых точек (типа деления на 0), то это основа для индуктивного заключения о существовании всех таких матриц нечетных порядков.

Определение 8. Срезом будем называть М-матрицы, принадлежащие разным слоям и объединенные близостью их порядков.

Например, помимо матриц Адамара, отличный от них слой образуют матрицы Мерсенна и Эйлера [4, 6]. Матрицы Ферма [5], определенные на порядках, не смежных четырем, слоя не образуют — это отдельные проявления, примыкающие к срезам, включающим в себя триады матриц Эйлера, Мерсенна, Адамара. Кроме работ [1—10], авторам не известны исследования квазиортогональных матриц локального максимума детерминанта, альтернативных матрицам Адамара. Поясним особое их значение.

Ранее было показано, что М-матрицы нечетного порядка, обладающие глобальным максимумом детерминанта, начинаются и завершаются первыми пятью их нетривиальными малоуровневыми представителями. Сходные проблемы наблюдаются и у матриц смежных классов. При $n = 12$ кончается представительство матриц Адамара, передаваемых одной их эквивалентной реализацией.

D-матрицы абсолютного максимума детерминанта, казалось бы, существуют всегда, при любых порядках. Значительно менее ощутимо качественное изменение материала: доказано, что они двухуровневые, т. е. их элементы имеют значения {1, –1}. Если и есть усложнение условий поиска таких матриц, то оно похоже на следствие увеличения их порядка. Тем не менее D-матрица 15-го порядка [17] найдена лишь в 2004 г., она одна из множества сходных с ней, первая неизвестная матрица имеет порядок 22 (для матриц Адамара проблемным порядком является 668 [18]). Сопоставление М-матрицы $\mathbf{A}_{13}$ и матрицы Рагхаварао $\mathbf{R}_{13}$ [16] говорит о том, что проблемы у двух типов матриц максимального детерминанта, квазиортогональных и нет, не столь различны.

Все эти факты взаимосвязаны и говорят о плохой обусловленности задачи, независимо от ее трактовки на различных классах матриц. Порядок 13 является граничным для строго оптимальных матриц. Локальный экстремум несколько иной в своем окружении, чем глобальный. Безусловно, он сопровождает глобальный максимум и является его повторением, менее выраженным деталями. Он лишен разнообразия, а значит, нет близких решений. Локальные экстремумы устойчивы, что способствует легкости их нахождения. Важно подчеркнуть: устойчивы они настолько, что нет рубежной границы проявления хаоса в количестве уровней искомых матриц.

Располагаясь на срезах единого математического объекта, матрицы локального максимума детерминанта несут информацию о строго оптимальных матрицах четных порядков. Тем самым матрицы Адамара можно изучать по их соседям на нечетном порядке — матрицам Мерсенна, включая и сам факт их существования.

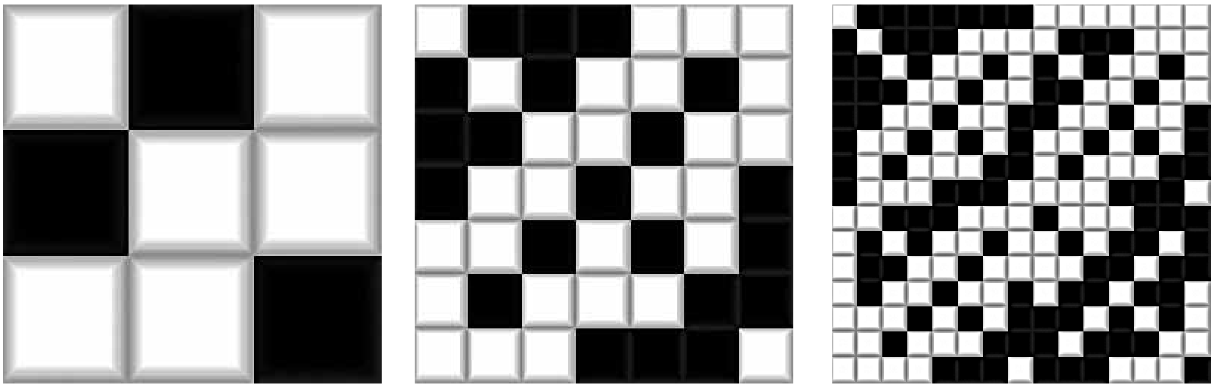
Матрицы Мерсенна

Матрицы Мерсенна [4] — квазиортогональные матрицы локального максимума детерминанта, впервые обнаруженные на порядках $n = 2^k - 1$, где k — целое число, принадлежащих последовательности чисел Мерсенна.

Определение 9. Квазиортогональными матрицами Мерсенна $\mathbf{M}$ будем называть двухуровневые матрицы порядков $n = 4k - 1$ со значениями элементов $\{1, -b\}$, где $b < 1$, удовлетворяющие квадратичному условию связи

$$\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} = \omega(n)\mathbf{I}.$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица; $\omega(n) = \dfrac{(n+1) + (n-1)b^2}{2}$ — переменный вес, $b = 1/2$



■ *Рис. 6.* Портреты матриц Мерсенна $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_7$, $\mathbf{M}_{15}$ порядков, равных числам Мерсенна

при $n=3$, в остальных случаях $b=\dfrac{q+\sqrt{4q}}{q-4}$, $q=n+1$ (порядок соседствующих матриц Адамара).

Матрица $\mathbf{M}_3$ является матрицей глобального максимума детерминанта и совпадает с матрицей $\mathbf{A}_3$. На фоне более значительного по величине детерминанта матрицы $\mathbf{A}_7$ структура $\mathbf{M}_7$ мало заметна, но после идентификации ее как продолжения $\mathbf{A}_3$ появился модифицированный алгоритм Сильвестра их вычисления [4], давший последовательность матриц, представленных на рис. 6. Здесь, как отмечено, белый квадрат соответствует единице, а черный — отрицательному элементу $-b$.

Следуя логике Адамара и Пэли [14], следом были найдены квазиортогональные матрицы порядков 11 и 19, что позволило сформулировать гипотезу о существовании матриц Мерсенна на более широком, чем числа Мерсенна, множестве порядков [9].

Предположение 2. Матрицы Мерсенна всех порядков $n=4k-1$ существуют.

Предположение по характеру соответствует гипотезе Адамара, выдвинутой Пэли, но касается оно квазиортогональных матриц нечетного порядка. Матрицы Мерсенна — не целочисленные матрицы. Итерационный поиск локального экстремума функции детерминанта матрицы не является переборным, он применим без изменения к разным порядкам матриц (чего не было у Пэли). Итерационные алгоритмы иногда (не всегда) уступают комбинаторным в эффективности, когда последние применяются для частных случаев, на которые они ориентированы. Рассмотрим такой случай ниже.

Матрицы Мерсенна конструкции Пэли

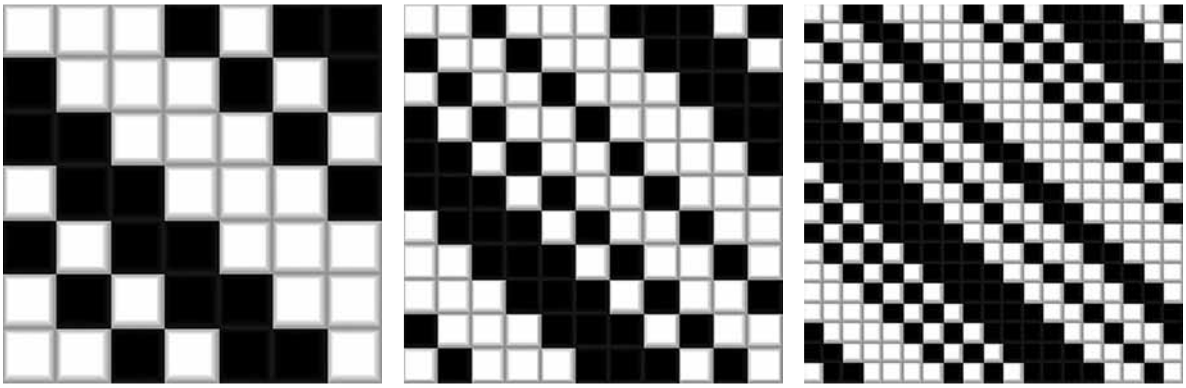
Нахождение матриц Мерсенна в сечениях, для которых известны алгоритмы вычисления соседних с ними матриц Адамара, облегчено возможностью построения модифицированных версий алгоритмов Сильвестра, Скарпи, Пэли, Уолша и др. Формулируются они даже проще, чем для классических матриц, поскольку матрицы Мерсенна в некотором смысле более первичны. Их порядок давно звучит в алгоритмах вычисления матриц Адамара.

Пусть n — простое число, задающее порядок матриц Мерсенна $n=4k-1$. Это необходимое и достаточное условие существования квазиортогональной циклической матрицы Мерсенна $\mathbf{M}$ с элементами, равными двухуровневым символам Лежандра $\chi\left(\dfrac{j-i}{n}\right)=\{1,\ -b\}$, вычисленным для разностей индексов i, j их строк и столбцов.

При симметричном определении символов Лежандра они равны 1, если числитель их аргумента — квадратичный вычет по модулю n, и –1, если невычет (в данном случае $-b$). При вычислении основанных на символах Лежандра матриц Якобсталя с нулевой диагональю значение $\chi\left(\dfrac{0}{n}\right)$ считают равным нулю. При расчете матриц Мерсенна аргументы в пользу ненулевого начала (единицы) перевешивают целесообразной простотой формулировки алгоритма.

Пример 1. Рассмотрим построение матрицы Мерсенна седьмого порядка $\mathbf{M}_7$, связанное с нахождением символов Лежандра для набора чисел {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}, равных разностям индексов элементов первой строки. Их квадраты по модулю 7 равны {0, 1, 4, 2, 2, 4, 1}. Соответственно, числа набора {1, 2, 4} представляют собой квадратичные вычеты, а остальные — невычеты. Иррациональное значение модуля уровня $b=2-\sqrt{2}\cong 0{,}5857$.

Портреты трех циклических матриц Мерсенна конструкции Пэли, начиная с $\mathbf{M}_7$ и включая $\mathbf{M}_{11}$ и $\mathbf{M}_{19}$, которыми они отличаются от сильвестровых, приведены на рис. 7.



■ *Рис. 7.* Портреты матриц Мерсенна конструкции Пэли $\mathbf{M}_7$, $\mathbf{M}_{11}$, $\mathbf{M}_{19}$

Матрицы Ферма

В теории чисел существуют хорошо известные последовательности чисел Мерсенна и Ферма. Последовательность чисел Мерсенна задается в виде $n=2^k-1$ и начинается с чисел 1, 3, 5, 15, 31, ..., она принадлежит подмножеству чисел вида $4k-1$. Последовательность чисел Ферма задается в виде $n=2^{2^k}+1$ и начинается с чисел 3, 5, 17, 257, 65 537, 4 294 967 297, ..., она принадлежит подмножеству чисел вида $4k+1$. Очевидно, что между теорией чисел и теорией ортогональных базисов существует соответствие, и если есть квазиортогональные матрицы Мерсенна, то есть и квазиортогональные матрицы Ферма. От матриц более общего характера их отличает особая простота получения модифицированным алгоритмом Сильвестра [5].

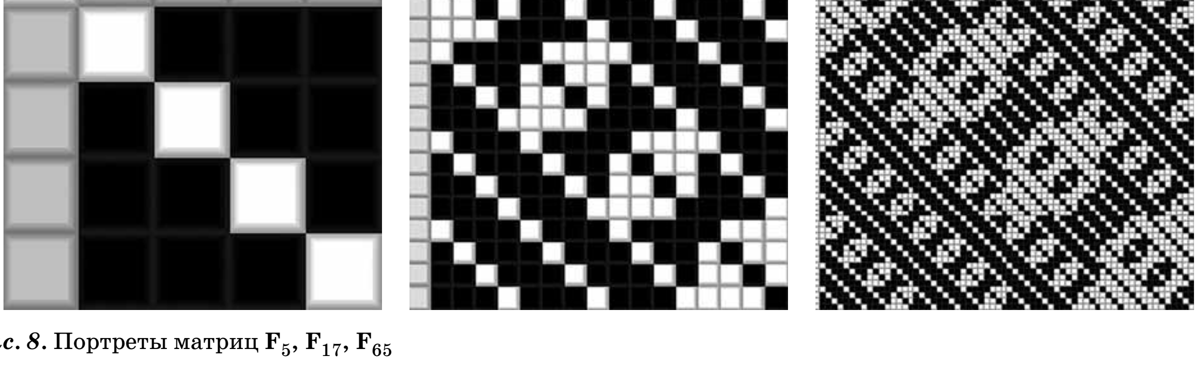
Интерес к самим числам Ферма возник в связи с ошибочным объединяющим их предположением, что члены этой последовательности — простые числа. Предположение не подтвердилось, и с тех пор поиск делителей чисел Ферма превратился в своеобразный вид математического соревнования. Для теории квазиортогональных матриц важно не то, что числа Ферма стали историческим реликтом, а то, что для них и, расширительно, всех порядков $n=2^k+1$ при четных значениях k модифицированный алгоритм Сильвестра строит комплементарную сильвестровым матрицам Мерсенна последовательность квазиортогональных матриц, названных матрицами Ферма [5].

Определение 10. Квазиортогональными матрицами Ферма $\mathbf{F}$ будем называть трехуровневые матрицы порядков $n=2^k+1$ при четных значениях k с элементами $\{1, -b, s\}$, где $s \le b < 1$, удовлетворяющие квадратичному условию связи

$$\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} = \omega(n)\mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица; вес $\omega(n)=1+(n-1)s^2$. Модульные уровни $b=s=2/3$ при $n=5$, в общем $b=\dfrac{2n-p}{p}$, элементы канвы $s=\dfrac{\sqrt{nq-2\sqrt{q}}}{p}$ составляют первые строку и столбец, за исключением первого единичного элемента, $p=q+\sqrt{q}$, $q=n-1$ (порядок соседствующих матриц Адамара). Портреты трех первых матриц Ферма $\mathbf{F}_5$, $\mathbf{F}_{17}$, $\mathbf{F}_{65}$ приведены на рис. 8.

Этот тип аппроксимации матриц Адамара сверху интересен для теории квазиортогональ-



■ *Рис. 8.* Портреты матриц $\mathbf{F}_5$, $\mathbf{F}_{17}$, $\mathbf{F}_{65}$

ных матриц тем, что определен на последовательности чисел $n=4k+1$ с пропусками. Вне базовых (сильвестровых) точек матрицы Ферма не обнаружены, поэтому слоя не образуют. Тем не менее локальный максимум детерминанта, их формирующий, появляется на предсказуемых значениях порядков, включающих числа Ферма.

Матрицы Ферма выделяет то, что они наиболее близки к матрицам Адамара и к матрицам с абсолютным значением максимума детерминанта нечетного порядка. Те и другие являются их целочисленной аппроксимацией при замене $b=s=1$, для получения матрицы Адамара отрезается кайма. Таким образом, модифицированная версия алгоритма Сильвестра [5] годится для вычисления обобщенных матриц Адамара нескольких классов. В силу новизны рассматриваемых матриц факт этот и алгоритм их нахождения широко не известны.

Матрицы Эйлера

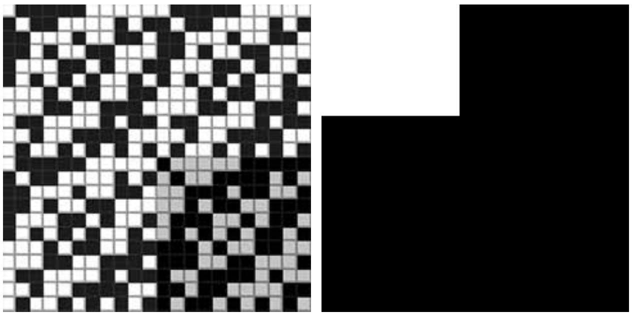
Описание квазиортогональных матриц локального максимума детерминанта дополним матрицами четных порядков вида $n=4k-2$.

Определение 11. Квазиортогональными матрицами Эйлера $\mathbf{E}$ будем называть модульно двухуровневые матрицы порядков $n=4k-2$ с элементами $\{1, -1, b, -b\}$, где $b<1$, удовлетворяющие квадратичному условию связи

$$\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{E}=\omega(n)\mathbf{I}.$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица; $\omega(n)=\dfrac{(n+2)+(n-2)b^2}{2}$ — переменный вес матрицы. Модульный уровень $b=1/2$ при $n=6$, в общем $b=\dfrac{q-\sqrt{8q}}{q-8}$, $q=n+2$ (порядок соседствующих матриц Адамара).

Половину всех матриц Эйлера можно вычислить по правилу Сильвестра [1] из матриц Мерсенна. В качестве примера на рис. 9 приведен портрет матрицы Эйлера $\mathbf{E}_{22}$, построенной учетверением матрицы Мерсенна $\mathbf{M}_{11}$, и гистограмма модулей ее элементов.



■ ***Рис. 9.*** Портрет матрицы $\mathbf{E}_{22}$ и гистограмма модулей ее элементов

Среди весовых функций $\omega(n)$ на рассматриваемых порядках в первую очередь были изучены простейшие линейные зависимости, порождающие матрицы Белевича с элементами $\{0, 1, -1\}$, нулевой диагональю и весом $\omega(n)=n-1$ [13]. До их выделения эти матрицы были известны как блоки алгоритма Пэли нахождения матриц Адамара удвоенного порядка. Целочисленность элементов матрицы — условие жесткое. Для его обеспечения необходимо, чтобы значение $\omega(n)$ было разложимо на сумму двух квадратов чисел [6]. Матрицы Белевича не существуют для значений порядков 22, 34, 58 и т. п., а первая проблемная матрица, которая не найдена, имеет порядок 66.

Матрицы Белевича были обобщены похожими на них взвешенными матрицами $\mathbf{W}(n, k)$ с бóльшим количеством разрешенных нулей и весом $\omega(n)=n-k$. Недостаток такого подхода к обеспечению условий существования состоит в следующем. Детерминант матрицы — степенная функция весового коэффициента: $|\det(\mathbf{A})|=\omega^{n/2}$, идея дискретного снижения $\omega(n)=n-k$ хороша ввиду простоты реализации, но оптимальное значение детерминанта возможно лишь у матриц Белевича или матриц, близких к ним. В самом деле, если $n=22$ и $n=34$, то следует допустить существование двух нулевых «диагоналей» (т. е. по два нуля в каждом столбце матрицы). Условие совместности матрицы порядка 58 требует наличия не менее пяти нулей. Можно найти квазиортогональные матрицы, превосходящие по детерминанту подобного сорта целочисленные варианты.

Следующая продуктивная идея состоит в том, чтобы указать матрицы локального максимума детерминанта, образующие, в отличие от матриц Белевича, слой — матрицы, заданные некоторым весом $\omega(n)$ и существующие на всех значениях порядка $n=4k+2$. Модульно двухуровневые матрицы несложно получить, как отмечалось, применением алгоритма удвоения порядка Сильвестра к матрицам Мерсенна. Таковы матрицы Эйлера, названные так потому, что замещаемые ими пропуски в ряду матриц Белевича определяются теоремой Эйлера — Ферма, дающей условие разложения веса на сумму двух квадратов чисел. Матрицы Эйлера легко образуют новые модификации: первая отличается целочисленными элементами $\{1, -1\}$ внедиагональных блоков, вторая, напротив, — равными между собой по модулю и противоположными по знакам элементами блоков диагональных. В этом они сходны с рассматриваемыми ниже матрицами Зейделя, которые слоя, в отличие от матриц Эйлера, не образуют.

Основное свойство матриц Эйлера состоит в том, что они существуют и легко находимы на проблемных для взвешенных матриц порядках 22, 34, 58, 66 и т. п. Разумеется, удвоение пропускает каждую вторую матрицу Эйлера. Существует алгоритм построения матриц с той же весовой функцией движением не снизу — удвоением порядка матриц Мерсенна, а сверху [6]. Они получаются из нормализованных матриц Мерсенна отрезанием их каймы. Соответственно, справедливо утверждение: если все матрицы Мерсенна существуют (а они существуют), то существуют и все матрицы Эйлера.

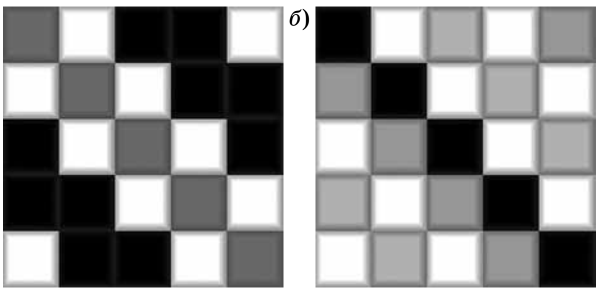
Квазиортогональные матрицы Зейделя

Для алгоритма Пэли разница между порядками матриц Мерсенна и Ферма невелика, в обоих случаях он порождает циклические малоуровневые квазиортогональные матрицы. На порядках матриц Ферма, в отличие от порядков матриц Мерсенна, ортогональность столбцов достижима на трехуровневых матрицах, которые будем называть квазиортогональными матрицами Зейделя.

Пусть n — простое число, задающее порядок в виде $n=4k+1$. Это необходимое и достаточное условие существования трехуровневых квазиортогональных циклических матриц Зейделя $\mathbf{S}$ с элементами, равными трехуровневым символам Лежандра $\chi\left(\frac{j-i}{n}\right)=\{1,\ -b,\ d\},\ d<b<1$, вычисляемых для разностей индексов i, j их строк и столбцов.

Трехуровневые символы Лежандра отличаются от двухуровневых (случай матриц Мерсенна) величиной диагональных элементов $\chi\left(\frac{0}{n}\right)=d=\frac{1}{1+\sqrt{n}}$, невычетам соответствуют модульные уровни $b=1-2d$. Матрицы нечетных порядков Зейделя и Мерсенна объединяет то, что их можно рассматривать как результат ортогонализации столбцов асимметричных и симметричных матриц Якобсталя. В теории графов первому типу матриц соответствуют целочисленные неортогональные матрицы смежности графов Зейделя [19], получаемые из матриц Белевича отрезанием их каймы.

а) б)



■ ***Рис. 10.*** Портреты матриц Зейделя $\mathbf{S}_5$ (*а*) и оптимальной матрицы $\mathbf{A}_5$ (*б*)

Между циклическими матрицами Зейделя и Мерсенна есть и существенное различие. Циклические матрицы Мерсенна соответствуют локальному максимуму детерминанта. Для симметричных матриц Зейделя это не так. Например, на порядке $n=5$ сосуществуют циклические симметричная матрица Зейделя $\mathbf{S}_5$ (рис. 10, *а*) и матрица $\mathbf{A}_5$ (рис. 10, *б*) глобального максимума детерминанта. Матрица Зейделя переходит во вторую матрицу изменением параметров первой сдвиговой строки с *увеличением* ее детерминанта, т. е. это края континуальной матрицы с завершениями $\mathbf{S}_5$ и $\mathbf{A}_5$.

На порядке $n=11$ сосуществуют циклические матрица Мерсенна $\mathbf{M}_{11}$ и матрица $\mathbf{A}_{11}$ глобального максимума детерминанта. Параметрическая оптимизация матрицы Мерсенна с переходом к $\mathbf{A}_{11}$ связана с понижением детерминанта в окрестности ее параметров. Отсюда следует предположение.

Предположение 3. Отличие порядков $n=4k+1$ и $n=4k-1$ состоит в том, что для первых матрицы локального максимума детерминанта слоя не образуют.

В качестве примера иных матриц, отличных от матриц Ферма, можно привести также D-матрицы, обладающие при $n=4k+1$ абсолютным максимумом детерминанта. Таковы циклические матрицы Рагхаварао $\mathbf{R}_5$ и $\mathbf{R}_{13}$ [16]. Как и матрицы Якобсталя [16], они ортогонализуемы всего лишь изменением уровня их отрицательных элементов.

Это вторая важная ветвь квазиортогональных матриц, сходных с матрицами Ферма выборочными значениями, которые принимают их порядки.

Таким образом, матрицы Зейделя к матрицам локального максимума детерминанта не принадлежат. Они являются предикаторами матриц Белевича и не существуют отдельно от них. Для $n=9$ есть блочная матрица Зейделя, она отвечает блочной матрице Белевича $\mathbf{C}_{10}$. По той же причине не существует матрицы Зейделя порядка $n=21$, это число не представимо суммой двух квадратов чисел. Матрицы Зейделя уступают матрицам Мерсенна (и Эйлера) в регулярности появления их порядков на числовой оси.

Целочисленные матричные уравнения

Матрицы Адамара $\mathbf{H}$ и Белевича $\mathbf{C}$ удовлетворяют матричным уравнениям с целыми коэффициентам вида

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}=n\mathbf{I};\ \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}=(n-1)\mathbf{I}.$$

Не ортогональные по столбцам матрицы максимального детерминанта отличаются наличием аддитивной добавки справа, например, матрицы Рагхаварао максимального детерминанта удовлетворяют уравнению $\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}=n\mathbf{I}+\mathbf{J}$, где $\mathbf{J}$ — матрица с элементами 1. От неоптимальных матриц Якобсталя $\mathbf{T}$ их отличает лишь знак в правой части: $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{T}=n\mathbf{I}-\mathbf{J}$.

Квазиортогональные матрицы локального максимума детерминанта связаны с целочисленными матрицами Рагхаварао и близкими к ним, отличаясь лишь уровнями элементов. Точно так же целочисленные матрицы с элементами {1, –1} описывают структуру матриц Мерсенна, Эйлера и Ферма отдельно от уровней. Приведем матричные уравнения, которым целочисленные аппроксимации удовлетворяют.

Матричное уравнение Мерсенна. Этому уравнению удовлетворяет округленная до целых значений элементов $\underline{\mathbf{M}}$ матрица Мерсенна

$$\underline{\mathbf{M}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{M}}=(n+1)\mathbf{I}-\mathbf{J}.$$

Матричное уравнение Ферма. Этому уравнению удовлетворяет округленная до целых значений элементов $\underline{\mathbf{F}}$ матрица Ферма

$$\underline{\mathbf{F}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{F}}=(n-1)\mathbf{I}+\mathbf{J}+\mathbf{Q},$$

где $\mathbf{Q}$ — матрица с элементами каймы $\sqrt{n-1}$, исключая первый нулевой элемент, и всеми нулевыми остальными элементами.

Матричное уравнение Эйлера. Этому уравнению удовлетворяет округленная до целых значений элементов $\underline{\mathbf{E}}$ матрица Эйлера

$$\underline{\mathbf{E}}^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{E}}=(n+2)\mathbf{I}+2\mathbf{X},$$

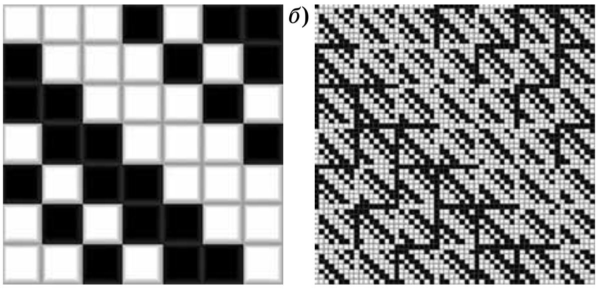
где $\mathbf{X}$ — блочно-диагональная матрица с единичными элементами диагональных блоков.

Матрицы $\underline{\mathbf{M}}$, $\underline{\mathbf{F}}$, $\underline{\mathbf{E}}$ играют роль собственных векторов, находимых отдельно от собственных значений — уровней. Двухуровневые матрицы Мерсенна порождают алгебру с двумя образующими, подобную алгебре комплексных чисел.

Аппроксимация матриц Адамара высоких порядков

Матрицы Мерсенна можно использовать при блочном построении матриц Адамара высоких порядков. Любую матрицу $\underline{\mathbf{M}}$ Мерсенна с округленными до целых значений отрицательными элементами можно вставить на место ее элементов, дополнив каймой из строки и столбца, заполненными вытесняемым элементом, кроме –1 в начале каймы. Полученная матрица будет матрицей Адамара при найденном еще Скарпи [15] условии: строки матрицы ротируются сдвигом, равным произведению индексов элемента (начинающихся с нуля). Пример матриц Мерсенна и Адамара, полученных модифицированным алгоритмом Скарпи, приведен на рис. 11, *а*, *б*.

а) *б*)



■ ***Рис. 11.*** Портреты матрицы Мерсенна $\mathbf{M}_7$ (*а*) и матрицы Адамара — Скарпи $\mathbf{H}_{56}$ (*б*)

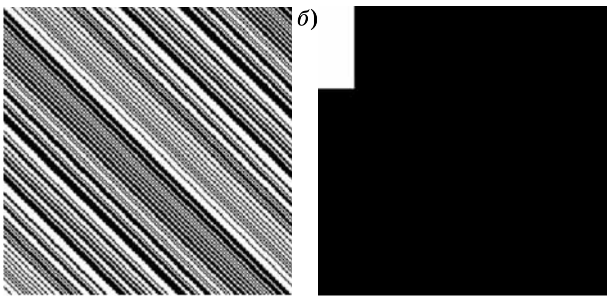
Такая формулировка фундаментального результата Скарпи мало известна, поскольку мало изучены матрицы локального максимума детерминанта. Округленные до целых значений стартовые матрицы $\underline{\mathbf{M}}_3$ Мерсенна и $\underline{\mathbf{E}}_6$ Эйлера можно использовать и без ротации их строк непосредственно в качестве матриц Вильямсона для подстановки их в массивы Вильямсона или Гетхальса — Зейделя [10, 20].

На порядках, бóльших, чем стартовые, для матриц Мерсенна и Эйлера существуют комплементарные матрицы, которыми их можно дополнять, формируя четверку матриц Вильямсона или Гетхальса — Зейделя. Вместо поиска комплементарных матриц несложно добиться выполнения условия ортогональности матрицы учетверенного порядка, сохраняя варьируемым отрицательный элемент только первой матрицы (из четырех).

Это правило настолько общее, что затрагивает порядки 668, 716, 892 и т. п., для которых матрицы Адамара не найдены до сих пор.

Например, матрице Адамара порядка 668 соответствует циклическая матрица Мерсенна $\mathbf{M}_{167}$ (рис. 12, *а*), которую вычисляет описанный выше модифицированный алгоритм Пэли. Гистограмма элементов квазиортогонального массива Вильямсона $\mathbf{W}_{668}$ отражает близость его к матрице Адамара $\mathbf{H}_{668}$ (рис. 12, *б*).

а) *б*)



■ ***Рис. 12.*** Портрет матрицы $\mathbf{M}_{167}$ (*а*) и гистограмма элементов матрицы $\mathbf{W}_{668}$ (*б*)

Подобные блочные квазиортогональные матрицы однозначно описываются своими весовыми функциями $\omega(n)$ и сопровождают, как и в случае алгоритма Скарпи, каждую матрицу Мерсенна или Эйлера [10].

К вопросу существования матриц Адамара

Предположение Пэли [14] о том, что проблема построения всех матриц Адамара порядков, кратных четырем, разрешима нахождением алгоритмов, дополняющих результаты применения подходов Сильвестра [11], Скарпи [15] и других, переносит трудности с поиска самих матриц на поиск способов их вычисления.

В различные годы было найдено много вариантов вычисления целочисленных взвешенных матриц и матриц Адамара [20—25], наиболее интересные решения помещены в обзор [26]. За матрицей порядка 268 [24] в 2004 г. была найдена матрица порядка 428 [27], что перенесло границу неизвестности, но не изменило, как отмечено в работе [28], общую ситуацию с поиском матриц комбинаторными методами. Наиболее продуктивный подход поиска циклических блоков массива Гетхальса — Зейделя [20] сопряжен с громоздким перебором вариантов [27]. Таким путем задача Пэли не решается, и это подтвердил столетний период конструирования все новых алгоритмов.

Между тем доказательство существования матриц Адамара вовсе не сводится к умению их находить. Сходная целочисленная проблема теории чисел, например, касается оценки количества простых чисел, меньших или равных заданному числу. Задача дискретной математики получила вторую жизнь, когда Риман, опираясь на предложения Эйлера, перевел задачу на язык функций комплексного переменного. Теперь она звучит как проблема локализации нетривиальных нулей дзета-функции Римана. Адамар принимал в исследовании этой проблемы непосредственное участие. Гипотеза, сформулированная позднее Пэли, едва ли сложнее отмеченной проблемы Римана. Проблема доказательства существования квазиортогональных целочисленных матриц с элементами $\{1, -1\}$ почти вдвое моложе и должна заметно проще решаться.

Переход к выяснению характера локальных максимумов функции детерминанта вместо работы с целочисленными матрицами является таким же ходом формализации, что и у Римана, только вместо комплексной плоскости и нулей речь идет об экстремумах функции, зависящей у матриц Мерсенна от пары аргументов — значений уровней.

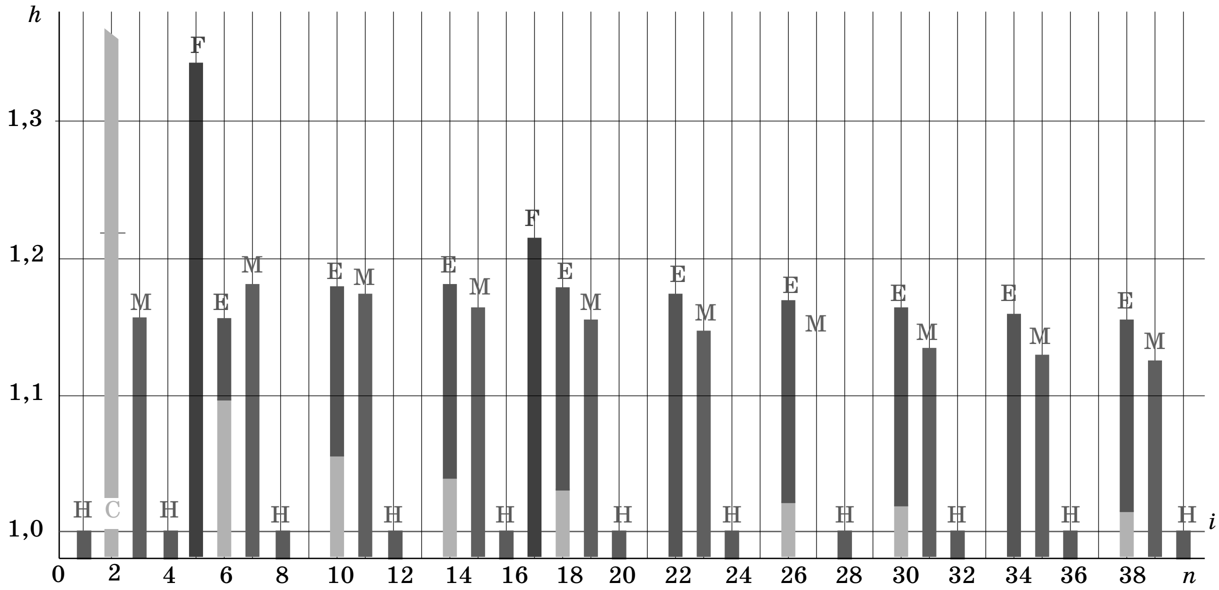
Обратим внимание на то, что какой-либо особый порядок никак не выражен в подходе, в котором модульный уровень $b = \frac{q+\sqrt{4q}}{q-4}$, $q = n+1$ матриц Мерсенна монотонно стремится к единице с увеличением порядка. Эти матрицы, начинаясь на первом неразличимом еще структурами порядке $n=1$ с матрицы Адамара, матрицей Адамара же и «заканчиваются». Расхождение матриц незначительное и лишь на старте в некоторой окрестности критичного порядка 13 (который проявляет себя и в этом). Далее матрицы Мерсенна по значениям их уровней почти не отличаются от матриц Адамара.

Матрицы Адамара и Мерсенна принадлежат к срезу некоторого более крупного, чем они, математического объекта, и если более доступная анализу нецелочисленная матрица существует, то существует и соседняя матрица Адамара. Это положение следует из наличия у обеих матриц объединяющего их структурного признака. Разница положительных и отрицательных элементов каждого столбца матрицы Мерсенна — целочисленный инвариант, равный 1. Следовательно, нормализованную матрицу Адамара, у которой этот структурный показатель равен 0 (помимо, естественно, каймы), можно получить из матрицы Мерсенна, округляя отрицательные и близкие к –1 значения до –1 и добавляя ровно такой же элемент каймы. Что касается вопроса существования матриц Мерсенна, то он решается проще. Целочисленность значений элементов этой матрицы не требуется.

Функция веса матриц Мерсенна не задана жестко — она является следствием воспроизводимых от порядка к порядку условий, которые ничем не выделены на всей числовой оси (не различимы между собой), отражая специфику локального максимума детерминанта. Функция веса — продукт идентификации на базе матриц малого размера. Она не имеет особенностей (делений на ноль), указывающих на проблему нахождения матриц Мерсенна с заранее вычисляемым уровнем для более высоких порядков.

Отсюда следует заключение: такие матрицы существуют для всех выделенных для них порядков на числовой оси [9, 10]. Предложение Пэли, возможно, вполне справедливо для комбинаторного подхода, однако при поиске матриц локального максимума детерминанта никакого различия варианты, выделенные Пэли, Скарпи и т. п., не обнаруживают. Программный комплекс [29], оптимизирующий m-норму, находит все без исключения матрицы, найденные ранее разными способами. Это и матрицы Адамара [12] порядков 12 и 20, и взвешенные матрицы [7], а также отдельные артефактные матрицы [8].

Новый подход решает проблему в значительно более широкой ее постановке и раскрывает ее



■ ***Рис. 13.*** h-нормы матриц Эйлера **(E)**, Белевича **(C)**, Мерсенна **(M)**, Адамара **(H)** и Ферма **(F)**

ранее неизвестные детали. Вполне возможно, что если бы проблема решалась изначально в такой плоскости, почвы для формулировки «проблемы существования» отмеченных матриц просто бы не возникало.

Заключение

В статье описан единый математический объект, имеющий, как предполагается, ограниченное число особенностей. Они сконцентрированы по порядкам представляющих их матриц в самом начале объекта. Порядки, меньшие или близкие к 13, интересны в этом смысле нахождением на них некоторых редких точечных структур, таких как матрица золотого сечения [8]. С дальнейшим ростом значения порядка число заметных неоднородностей уменьшается, и их можно описать тесно взаимосвязанными структурами.

Наиболее крупное образование представляют собой матрицы Адамара, Мерсенна, Эйлера, к которым примыкают иногда матрицы Ферма и сходные с ними матрицы, полученные ортогонализацией матриц Рагхаварао. Прочие матрицы, такие как матрицы Белевича и Зейделя, тоже образуют тесно связанные, в данном случае, — пары на соседних порядках. Вопрос существования отмеченных троиц (четверок) и пар принципиален и, как видится, решается проще в такой расширенной постановке, когда на элементы матриц нет ограничений, в виде их целочисленности.

В заключение обзора матриц локального максимума детерминанта проиллюстрируем зависимости от порядка n детерминантов матриц трех выделенных слоев: Эйлера, Мерсенна, Адамара, — добавив к ним ветви выборочно проявляющих себя матриц Ферма и Белевича. Так как график детерминанта $|\det(\mathbf{A})| = n^{n/2}/h^n$ быстро растет, для иллюстрации достаточно, избавившись от степеней, вывести график делителя — адамаровой нормы $h(n)$. Если делитель стремится к единице, а он стремится к ней у всех отмеченных матриц, то такие матрицы с ростом порядка почти ничем не отличаются от адамаровых с их максимально большим определителем. Графики h-норм рассмотренных в статье матриц приведены на рис. 13.

Квазиортогональные матрицы можно дублировать и распространить вправо по правилу [1], причем адамарова норма h не будет понижаться, но и не будет расти. Это инвариант преобразования Сильвестра. На графиках инвариант виден по h-нормам связанных друг с другом матриц Мерсенна и Эйлера (удвоенного порядка). Данные инварианты описывают равновеликие по h-нормам особенности единого математического объекта и обобщают правило, использованное Пэли для увеличения числа найденных им матриц Адамара. В работе приведена также другая важная константа $B = h_{13}$, касающаяся работы итерационных алгоритмов поиска минимаксных матриц [1, 2, 29].

Литература

1. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** М-матрицы // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1(50). С. 14–21.
2. **Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б.** Алгоритм и программа поиска и исследования М-матриц // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 3(64). С. 82–86.
3. **Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б.** М-матрица 22-го порядка // Информационно-управляющие системы. 2011. № 5(54). С. 87–90.
4. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Мироновский Л. А.** Вычисление матриц Адамара — Мерсенна // Информационно-управляющие системы. 2012. № 5(60). С. 92–94.
5. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Мироновский Л. А.** Вычисление матриц Адамара — Ферма // Информационно-управляющие системы. 2012. № 6(61). С. 90–93.
6. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** О двух способах построения матриц Адамара — Эйлера // Информационно-управляющие системы. 2013. № 1(62). С. 7–10.
7. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Взвешенная конференц-матрица, обобщающая матрицу Белевича на 22-м порядке // Информационно-управляющие системы. 2013. № 5(66). С. 97–98.
8. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Матрица золотого сечения G_{10} // Информационно-управляющие системы. 2013. № 6(67). С. 2–5.
9. **Балонин Н. А.** О существовании матриц Мерсенна 11-го и 19-го порядков // Информационно-управляющие системы. 2013. № 2(63). С. 89–90.
10. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** К вопросу существования матриц Мерсенна и Адамара // Информационно-управляющие системы. 2013. № 5(66). С. 2–8.
11. **Silvester J. J.** Thoughts on inverse orthogonal matrices, simultaneous sign successions, and tessellated pavements in two or more colours, with applications to Newton's rule, ornamental tile-work, and the theory of numbers // Philosophical Magazine. 1867. Vol. 34. P. 461–475.
12. **Hadamard J.** Résolution d'une question relative aux determinants//Bulletin des Sciences Mathématiques. 1893. Vol. 17. P. 240–246.
13. **Belevitch V.** Theorem of 2n-terminal networks with application to conference telephony // Electr. Commun. 1950. Vol. 26. P. 231–244.
14. **Paley R. E. A. C.** On orthogonal matrices // J. of Mathematics and Physics. 1933. Vol. 12. P. 311–320.
15. **Scarpis U.** Sui determinanti di valore Massimo // Rendiconti della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. 1898. Vol. 31. P. 1441–1446.
16. **Raghavarao D.** Some Optimum Weighing Designs // The Annals of Mathematical Statistics. 1959. Vol. 30. N 2. P. 295–303.
17. **Orrick W. P.** The maximal {–1, 1}-determinant of order 15 // Metrika. 2004. Vol. 62. P. 192–219.
18. **Shalom Eliahou.** La conjecture de Hadamard (I) – Images des Mathématiques // CNRS. 2012. http://images.math.cnrs.fr/La-conjecture-de-Hadamard-I.html (дата обращения: 05.01.2014).
19. **Seidel J. J.** Strongly Regular Graphs with (–1,1,0) Adjacency Matrix Having Eigenvalue 3// Linear Algebra and its Applications. 1968. Vol. 1. P. 281–298.
20. **Turyn R. J.** Hadamard matrices, Baumert-Hall units, four-symbol sequences, pulse compression, and surface wave encodings // J. Combin. Theory. Ser. A16. 1974. P. 313–333.
21. **Hall M.** Combinatorial Theory. 2nd ed. – N. Y.: Wiley, 1998. – 464 p.
22. **Geramita A. V., Seberry J.** Orthogonal Designs: Quadratic Forms and Hadamard Matrices. – N. Y.: Dekker, 1979. – 460 p.
23. **Craigen R.** Hadamard matrices and designs//CRC Handbook of Combinatorial Designs / C. J. Colbourn and J. H. Dinitz eds. – CRC Press, 1996. – P. 229–516.
24. **Sawade K.** A Hadamard matrix of order 268// Graphs Combin. 1985. Vol. 1. N 2. P. 185–187.
25. **Koukouvinos C.** et al. On sequences with zero autocorrelation // Designs, Codes and Cryptography. 1994. Vol. 4. P. 327–340.
26. **Colbourn C. J., Dinitz J. H.** Handbook of Combinatorial Designs. Sec. Ed. – Chapman and Hall/CRC, 2007. – 967 p.
27. **Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. A.** Hadamard matrix of order 428 // J. of Combinatorial Designs. 2005. Vol. 13. P. 435–440.
28. **Horadam K. J.** Hadamard Matrices and Their Applications. – Princeton: Princeton University Press, 2007. – 280 p.
29. **Балонин Ю. Н.** Программный комплекс MMatrix-2 и найденные им М-матрицы // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2013. № 10(112). С. 58–64.

UDC 519.61:511-33

Local Maximum Determinant Matrices

Balonin N. A.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, korbendfs@mail.ru
Sergeev M. B.[a], Dr. Sc., Tech., Professor, mbse@mail.ru
[a] Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: Basic generalizations of Hadamard matrices are associated with maximum determinant matrices or matrices with orthogonal columns non-optimal by determinant; quasi-orthogonal local maximum determinant matrices have been understudied. The goal of this paper is to consider a theory of these matrices according to preliminary research results. **Methods:** Extreme solutions have been found by minimization of maximum of matrices elements absolute values with their consequent classification according to an amount and values of levels which depend on orders. **Results:** There has been substantiated a conjecture that there are only five non-trivial and strongly optimal low-level matrices of odd order — less than 13. There have been identified and described by weighing functions the main types of quasi-orthogonal local maximum determinant matrices (M-matrices) including Mersenne, Fermat and Euler matrices. A conjecture concerning existence of all Mersenne matrices of odd order has been formulated. The issue of Mersenne and Hadamard matrices existence has been considered. An example of Hadamard matrix of 668th order approximated by block array with Williamson matrices based on Mersenne matrices has been given. M-Matrices determinants dependence on its orders has been illustrated by graphs. **Practical relevance:** Algorithms to construct M-Matrices have been implemented while developing the research software. Mersenne and Fermat Filters used for masking and image compression are based on matrices suboptimal by determinant.

Keywords — Orthogonal Matrices, Hadamard Matrices, Belevich Matrices, Mersenne Matrices, Fermat Matrices, Euler Matrices, Hadamard Conjecture.

References

1. Balonin N. A., Sergeev M. B. M-Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2011, no. 1(50), pp. 14–21 (In Russian).
2. Balonin Ju. N., Sergeev M. B. The Algorithm and the Program of Research and Study of M-Matrices. *Nauchno-tekhnicheskii vestnik informatsionnykh tekhnologii, mekhaniki i optiki*, 2013, no. 3(64), pp. 82– 86 (In Russian).
3. Balonin Ju. N., Sergeev M. B. M-Matrix of the 22nd Order. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2011, no. 5(54), pp. 87–90 (In Russian).
4. Balonin N. A., Sergeev M. B., Mironovskij L. A. Calculation of Hadamard – Mersenne Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2012, no. 5(60), pp. 92–94 (In Russian).
5. Balonin N. A., Sergeev M. B., Mironovskij L. A. Calculation of Hadamard – Fermat Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2012, no. 6(61), pp. 90–93 (In Russian).
6. Balonin N. A., Sergeev M. B. Two Ways to Construct Hadamard – Euler Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2013, no. 1(62), pp. 7–10 (In Russian).
7. Balonin N. A., Sergeev M. B. Weighted Conference Matrix Generalizing Belevich Matrix at the 22nd Order. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2013, no. 5(66), pp. 97–98 (In Russian).
8. Balonin N. A., Sergeev M. B. Matrix of Golden Ratio G_{10}. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2013, no. 6(67), pp. 2–5 (In Russian).
9. Balonin N. A. Existence of Mersenne Matrices of 11th and 19th Orders. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2013, no. 2(63), pp. 89–90 (In Russian).
10. Balonin N. A., Sergeev M. B. On the Issue of Existence of Hadamard and Mersenne Matrices. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy*, 2013, no. 5(66), pp. 2–8 (In Russian).
11. Silvester J. J. Thoughts on Inverse Orthogonal Matrices, Simultaneous Sign Successions, and Tessellated Pavements in Two or More Colours, with Applications to Newton's Rule, Ornamental Tile-Work, and the Theory of Numbers. *Philosophical Magazine*, 1867, vol. 34, pp. 461–475.
12. Hadamard J. *Résolution d'une question relative aux déterminants* [Resolution of One Problem Related to the Determinants]. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246 (In French).
13. Belevitch V. Theorem of 2n-Terminal Networks with Application to Conference Telephony. *Electrical Communication*, 1950, vol. 26, pp. 231–244.
14. Paley R. E. A. C. On Orthogonal Matrices. *Journal of Mathematics and Physics*, 1933, vol. 12, pp. 311–320.
15. Scarpis U. *Sui determinanti di valore Massimo* [On the Determinants of Maximum Value]. *Rendiconti della R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, 1898, no. 31, pp. 1441-1446 (In Italian).
16. Raghavarao D. Some Optimum Weighing Designs. *The Annals of Mathematical Statistics*, 1959, vol. 30, no. 2, pp. 295–303.
17. Orrick W. P. The Maximal {–1, 1}-Determinant of Order 15. *Metrika*, 2004, vol. 62, pp. 192–219.
18. Shalom Eliahou. *La conjecture de Hadamard (I) – Images des Mathématiques* [The Conjecture of Hadamard (I) – Images of Mathematics]. 2012. Available at: http://images.math.cnrs.fr/La-conjecture-de-Hadamard-I.html (accessed 5 January 2014) (In French).
19. Seidel J. J. Strongly Regular Graphs with (–1, 1, 0) Adjacency Matrix Having Eigen Value 3. *Linear Algebra and its Applications*, 1968, no. 1, pp. 281–298.
20. Turyn R. J. Hadamard Matrices, Baumert-Hall Units, Four-Symbol Sequences, Pulse Compression, and Surface Wave Encodings. *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. A16, 1974, pp. 313–333.
21. Hall M. *Combinatorial Theory*. 2nd ed. New York, Wiley, 1998. 464 p.
22. Geramita A. V. and Seberry J. *Orthogonal Designs: Quadratic Forms and Hadamard Matrices*. New York, Dekker, 1979. 460 p.
23. Craigen R. Hadamard Matrices and Related Designs, In: *CRC Handbook of Combinatorial Designs*. C. J. Colbourn and J. H. Dinitz, eds. CRC Press, 1996, pp. 229–516.
24. Sawade K. A. Hadamard Matrix of Order 268. *Graphs Combinatorics*, 1985, vol. 1, no. 2, pp. 185–187.
25. Koukouvinos C., Kounias S., Seberry J., Yang C. H. and Yang J. On Sequences with Zero Autocorrelation. *Designs, Codes and Cryptography*, 1994, no. 4, pp. 327–340.
26. Colbourn C. J., Dinitz J. H. *Handbook of Combinatorial Designs*. Sec. ed. Chapman and Hall/CRC, 2007. 967 p.
27. Kharaghani H., Tayfeh-Rezaie B. A. Hadamard Matrix of Order 428. *Journal of Combinatorial Designs*, 2005, vol. 13, pp. 435–440.
28. Horadam K. J. *Hadamard Matrices and Their Applications*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007. 280 p.
29. Balonin Ju. N. The Software Complex M-Matrix-2 and Searched Minimax Matrices. *Vestnik komp'iuternykh i informatsionnykh tekhnologii*, 2013, no. 10(112), pp. 58–64 (In Russian).