УДК 629.191

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТИВНЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММ ДВИЖЕНИЯ ЛА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

И. О. Петров[a]***,*** *канд. техн. наук*
[a]*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, РФ*

Постановка проблемы: *анализ известных методов расчета программ движения летательных аппаратов относительно центра масс показал, что они основаны на использовании упрощенных моделей летательных аппаратов и не оптимальны с точки зрения максимизации скорости изменения кинетической энергии вращения. Целью работы является разработка нового метода определения оперативных оптимальных программ движения летательных аппаратов относительно центра масс.* ***Методы:*** *использован метод определения управления на основе энергетического принципа.* ***Результаты:*** *разработана и описана математическая модель движения летательных аппаратов относительно центра масс при полном составе тензора инерции в виде дифференциальных уравнений Эйлера. Обоснован новый подход к определению оптимальных оперативных программ движения летательных аппаратов относительно центра масс на основе энергетической теории маневрирования. Сущность подхода заключается в максимизации мощности поверхностных управляющих сил относительно мгновенной оси вращения летательных аппаратов.* ***Практическая значимость:*** *результаты исследований для синергетических маневров позволяют эффективно использовать их при баллистическом проектировании летательных аппаратов без решения сложных и трудоемких вариационных задач на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина.*

Ключевые слова *— летательный аппарат, маневрирование, оперативное оптимальное управление, энергетическая теория, кинетическая энергия вращения, мощность поверхностных сил, динамические уравнения Эйлера.*

Введение

С сугубо механической точки зрения маневр любого летательного аппарата (ЛА) — это изменение его кинетической энергии под действием соответствующих сил. После этого изменения через какое-то время происходит переход части кинетической энергии в потенциальную или наоборот.

Сущность энергетического подхода к маневрированию ЛА заключается в исследовании на экстремум мощности поверхностных сил, действующих на ЛА в полете, по координатам вектора управления. В этом случае получаются оперативные оптимальные программы движения центра масс ЛА. Если применить энергетический подход к движению ЛА, рассматриваемому как абсолютно твердое тело, то можно получить оперативные оптимальные программы движения ЛА относительно центра масс.

В связи с этим в данной статье рассмотрен нетрадиционный подход к разработке оперативных оптимальных программ движения ЛА относительно центра масс на основе энергетической теории маневрирования [1—7].

Постановка задачи управления движением ЛА относительно центра масс

При рассмотрении движения ЛА как абсолютно твердого тела необходимо в целях выполнения заданной программы движения центра масс определять оптимальные программы движения ЛА относительно центра масс. Оптимальность в этом случае определяется по критерию быстродействия поворота ЛА из текущего положения в программное положение, заданное на этот момент времени.

Для постановки задачи управления движением ЛА относительно центра масс необходимо вывести динамические уравнения Эйлера, описывающие движение ЛА относительно центра масс в самом общем виде. Это особенно актуально для средств выведения, так как из-за выработки топлива моменты инерции существенно меняются во времени и, кроме того, оси координат связанной системы отсчета в какой-то момент времени перестают совпадать с главными центральными осями инерции.

Согласно работам [8, 9], выражение для главного момента количеств движений системы (кинетического момента) $\mathbf{K}_0$ в векторном виде записывается следующим образом:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \mathbf{i} \\ \omega_y \mathbf{j} \\ \omega_z \mathbf{k} \end{bmatrix} =$$

$$= \left(I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \right)\cdot \mathbf{i} + \\ + \left(-I_{xy}\omega_x + I_y\omega_y - I_{yz}\omega_z \right)\cdot \mathbf{j} + \\ + \left(-I_{xz}\omega_x - I_{yz}\omega_y + I_z\omega_z \right)\cdot \mathbf{k}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}$ — тензор инерции ЛА, представляющий собой матрицу осевых моментов инерции и центробежных моментов инерции со знаком «–»; $\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \mathbf{i} \\ \omega_y \mathbf{j} \\ \omega_z \mathbf{k} \end{bmatrix}$ — вектор угловой скорости вращения ЛА относительно мгновенной оси вращения Ol.

Согласно теореме о дифференцировании абсолютного вектора и теореме об изменении главного момента количеств движений системы (кинетического момента), можно записать

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{K}}_0}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_0 = \mathbf{M}_0, \tag{2}$$

где $\frac{\mathrm{d}\mathbf{K}_0}{\mathrm{d}t}$ — абсолютная производная от $\mathbf{K}_0$ или абсолютная скорость конца вектора $\mathbf{K}_0$; $\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathbf{K}}_0}{\mathrm{d}t}$ — относительная производная от $\mathbf{K}_0$ в связанной системе отсчета $O_1 x_1 y_1 z_1$ или относительная скорость конца вектора $\mathbf{K}_0$ в связанной системе отсчета; $\mathbf{M}_0$ — главный момент внешних сил относительно центра вращения O.

С учетом (2) запишем уравнение для вычисления производных $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ в связанной системе отсчета в векторном виде:

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}_0 - \left[\boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}\right)\right] - \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}. \tag{3}$$

Введя обозначение $\mathbf{b} = \mathbf{M}_0 - \left[\boldsymbol{\omega} \times \left(\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}\right)\right] - \dot{\mathbf{I}} \cdot \boldsymbol{\omega}$, в окончательном виде получим

$$\mathbf{I} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{b}. \tag{4}$$

Проекции вектора $\mathbf{b}$ на оси связанной системы отсчета выглядят следующим образом:

$$b_x = b_1 = M_x - \left(I_z - I_y\right)\omega_z\omega_y - I_{yz}\left(\omega_z^2 - \omega_y^2\right) - \left(I_{xy}\omega_z - I_{xz}\omega_y\right)\omega_x - \dot{I}_x\omega_x + \dot{I}_{xy}\omega_y + \dot{I}_{xz}\omega_z;$$
$$b_y = b_2 = M_y - \left(I_x - I_z\right)\omega_x\omega_z - I_{xz}\left(\omega_x^2 - \omega_z^2\right) - \left(I_{yz}\omega_x - I_{xy}\omega_z\right)\omega_y + \dot{I}_{xy}\omega_x - \dot{I}_y\omega_y + \dot{I}_{yz}\omega_z;$$
$$b_z = b_3 = M_z - \left(I_y - I_x\right)\omega_y\omega_x - I_{xy}\left(\omega_y^2 - \omega_x^2\right) - \left(I_{xz}\omega_y - I_{yz}\omega_x\right)\omega_z + \dot{I}_{xz}\omega_x + \dot{I}_{yz}\omega_y - \dot{I}_z\omega_z. \tag{5}$$

С учетом (5) систему уравнений (4) в скалярном виде можно записать так:

$$\begin{cases} i_{11}\dot{\omega}_x + i_{12}\dot{\omega}_y + i_{13}\dot{\omega}_z = b_1 \\ i_{21}\dot{\omega}_x + i_{22}\dot{\omega}_y + i_{23}\dot{\omega}_z = b_2, \\ i_{31}\dot{\omega}_x + i_{32}\dot{\omega}_y + i_{33}\dot{\omega}_z = b_3 \end{cases} \tag{6}$$

где коэффициенты i_{11}, ..., i_{33} являются элементами тензора инерции $\mathbf{I}$, т. е.

$$i_{11} = I_x,\ i_{12} = -I_{xy},\ i_{13} = -I_{xz},$$
$$i_{21} = -I_{xy},\ i_{22} = I_y,\ i_{23} = -I_{yz},$$
$$i_{31} = -I_{xz},\ i_{32} = -I_{yz},\ i_{33} = I_z.$$

Разрешая систему (6) по правилу Крамера, получим в самом общем виде динамические уравнения Эйлера

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \dfrac{D_{\omega_x}}{D} \\ \dot{\omega}_y = \dfrac{D_{\omega_y}}{D}, \\ \dot{\omega}_z = \dfrac{D_{\omega_z}}{D} \end{cases} \tag{7}$$

где

$$D_{\omega_x} = b_1\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right) + b_2\left(I_{xz} I_{yz} + I_{xy} I_z\right) + b_3\left(I_{xy} I_{yz} + I_{xz} I_y\right);$$
$$D_{\omega_y} = b_1\left(I_{yz} I_{xz} + I_{xy} I_z\right) + b_2\left(I_x I_z - I_{xz}^2\right) + b_3\left(I_{xz} I_{xy} + I_{yz} I_x\right);$$
$$D_{\omega_z} = b_1\left(I_{xy} I_{yz} + I_{xz} I_y\right) + b_2\left(I_{xy} I_{xz} + I_{yz} I_x\right) + b_3\left(I_x I_y - I_{xy}^2\right);$$
$$D = I_x I_y I_z - 2 I_{xy} I_{yz} I_{xz} - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2. \tag{8}$$

Проанализируем зависимость общих уравнений Эйлера (7) от управления $\mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}$, т. е. зависимость угловых ускорений ЛА от положения рулевых органов (рулевых двигателей, рулевых аэродинамических поверхностей), обеспечивающих требуемое вращение ЛА относительно центра масс.

Из анализа выражений (5), (8) для D_{ω_x}, D_{ω_y}, D_{ω_z}, D видно, что величина D не зависит от вектора $\mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}$, так как представляет собой определитель тензора инерции $\mathbf{I}$ и зависит только от инерционных характеристик самого ЛА. Следовательно, в дальнейшем с точки зрения управления движением ЛА относительно центра масс рассматриваем только величины D_{ω_x}, D_{ω_y}, D_{ω_z}.

Подставив выражения (5) в выражение (8), получим

$$D_{\omega_x} = \left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)\begin{bmatrix} M_x - \left(I_z - I_y\right)\omega_z\omega_y - I_{yz}\left(\omega_z^2 - \omega_y^2\right) - \\ -\left(I_{xy}\omega_z - I_{xz}\omega_y\right)\omega_x - \dot{I}_x\omega_x + \dot{I}_{xy}\omega_y + \dot{I}_{xz}\omega_z \end{bmatrix} + \left(I_{xz} I_{yz} + I_{xy} I_z\right)\begin{bmatrix} M_y - \left(I_x - I_z\right)\omega_x\omega_z - I_{xz}\left(\omega_x^2 - \omega_z^2\right) - \\ -\left(I_{yz}\omega_x - I_{xy}\omega_z\right)\omega_y + \dot{I}_{xy}\omega_x - \dot{I}_y\omega_y + \dot{I}_{yz}\omega_z \end{bmatrix} + \left(I_{xy} I_{yz} + I_{xz} I_y\right)\begin{bmatrix} M_z - \left(I_y - I_x\right)\omega_y\omega_x - I_{xy}\left(\omega_y^2 - \omega_x^2\right) - \\ -\left(I_{xz}\omega_y - I_{yz}\omega_x\right)\omega_z + \dot{I}_{xz}\omega_x + \dot{I}_{yz}\omega_y - \dot{I}_z\omega_z \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Управлять движением ЛА относительно центра масс можно только за счет изменения проекций моментов M_x, M_y, M_z под действием управляющих сил. Таким образом, анализируя выражение (9) для D_{ω_x} и аналогичные выражения для D_{ω_y}, D_{ω_z}, видим, что динамические уравнения Эйлера $\dot{\omega}_x$, $\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_z$ в виде (7) можно разделить на две части:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \dot{\omega}_x^{(\mathbf{u})} + \dot{\omega}_x^{(\mathbf{I})} \\ \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_y^{(\mathbf{u})} + \dot{\omega}_y^{(\mathbf{I})}, \\ \dot{\omega}_z = \dot{\omega}_z^{(\mathbf{u})} + \dot{\omega}_z^{(\mathbf{I})} \end{cases} \tag{10}$$

где $\dot{\omega}_x^{(\mathbf{u})} = f_1\left(\mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}\right)$, $\dot{\omega}_y^{(\mathbf{u})} = f_2\left(\mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}\right)$, $\dot{\omega}_z^{(\mathbf{u})} = f_3\left(\mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}\right)$ — составляющие дифференциальных уравнений Эйлера, которые зависят от вектора управления $\mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}$; $\dot{\omega}_x^{(\mathbf{I})}$, $\dot{\omega}_y^{(\mathbf{I})}$, $\dot{\omega}_z^{(\mathbf{I})}$ — составляющие дифференциальных уравнений Эйлера, которые не зависят от вектора управления $\mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}$ и зависят только от тензора инерции ЛА.

Общие выражения для зависящих от управления $\mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}$ составляющих $\dot{\omega}_x^{(\mathbf{u})}$, $\dot{\omega}_y^{(\mathbf{u})}$, $\dot{\omega}_z^{(\mathbf{u})}$ выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x^{(\mathbf{u})} = \\ = \dfrac{\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right) M_x + \left(I_{xz} I_{yz} + I_{xy} I_z\right) M_y + \left(I_{xy} I_{yz} + I_{xz} I_y\right) M_z}{I_x I_y I_z - 2 I_{xy} I_{yz} I_{xz} - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2}; \\ \dot{\omega}_y^{(\mathbf{u})} = \\ = \dfrac{\left(I_{yz} I_{xz} + I_{xy} I_z\right) M_x + \left(I_x I_z - I_{xz}^2\right) M_y + \left(I_{xz} I_{xy} + I_{yz} I_x\right) M_z}{I_x I_y I_z - 2 I_{xy} I_{yz} I_{xz} - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2}; \\ \dot{\omega}_z^{(\mathbf{u})} = \\ = \dfrac{\left(I_{xy} I_{yz} + I_{xz} I_y\right) M_x + \left(I_{xy} I_{xz} + I_{yz} I_x\right) M_y + \left(I_x I_y - I_{xy}^2\right) M_z}{I_x I_y I_z - 2 I_{xy} I_{yz} I_{xz} - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2}. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, для обеспечения оптимального по быстродействию поворота ЛА относительно центра масс необходимо найти управление, максимизирующее угловые скорости вращения (11).

Определение оперативных оптимальных программ движения ЛА относительно центра масс на основе энергетической теории

Для обеспечения оперативного поворота ЛА относительно мгновенной оси вращения необходимо максимизировать скорость изменения кинетической энергии вращения ЛА $\dot{T}_{\hat{a}\eth}$ за счет управляющих поверхностных сил, т. е. необходимо оптимально изменять моменты M_x, M_y, M_z за счет координат вектора управления $\mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}$. В качестве координат вектора управления могут выступать отклонения рулевых двигателей, отклонения аэродинамических рулевых поверхностей (руля высоты, руля направления, элеронов, интерцепторов, закрылков, предкрылков и т. п.).

Запишем выражение для кинетической энергии вращения ЛА относительно мгновенной оси вращения [8]:

$$T_{\hat{a}\eth} = \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 - \\ - I_{xy}\omega_x\omega_y - I_{yz}\omega_y\omega_z - I_{zx}\omega_z\omega_x. \tag{12}$$

Запишем производную по времени:

$$\dot{T}_{\hat{a}\eth} = I_x\omega_x\dot{\omega}_x + I_y\omega_y\dot{\omega}_y + I_z\omega_z\dot{\omega}_z - \\ - I_{xy}\dot{\omega}_x\omega_y - I_{xy}\omega_x\dot{\omega}_y - I_{yz}\dot{\omega}_y\omega_z - \\ - I_{yz}\omega_y\dot{\omega}_z - I_{zx}\dot{\omega}_z\omega_x - I_{zx}\omega_z\dot{\omega}_x + \\ + \left(\begin{matrix} \frac{1}{2}\dot{I}_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}\dot{I}_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}\dot{I}_z\omega_z^2 - \\ - \dot{I}_{xy}\omega_x\omega_y - \dot{I}_{yz}\omega_y\omega_z - \dot{I}_{zx}\omega_z\omega_x \end{matrix} \right). \tag{13}$$

С учетом (11) выражение для скорости изменения кинетической энергии вращения можно записать следующим образом:

$$\dot{T}_{\hat{a}\eth} = \dot{T}_{\hat{a}\eth}^{(\mathbf{u})} + \dot{T}_{\hat{a}\eth}^{(\mathbf{I})}, \tag{14}$$

где

$$\dot{T}_{\hat{a}\eth}^{(\mathbf{u})} = \dot{\omega}_x^{(\mathbf{u})}\left(I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{zx}\omega_z\right) + \\ + \dot{\omega}_y^{(\mathbf{u})}\left(I_y\omega_y - I_{xy}\omega_x - I_{yz}\omega_z\right) + \\ + \dot{\omega}_z^{(\mathbf{u})}\left(I_z\omega_z - I_{yz}\omega_y - I_{zx}\omega_x\right);$$

$$\dot{T}_{\hat{a}\eth}^{(\mathbf{I})} = \dot{T}_{\hat{a}\eth}^{(\mathbf{I_1})} + \dot{T}_{\hat{a}\eth}^{(\mathbf{I_2})},$$

$$\dot{T}_{\hat{a}\eth}^{(\mathbf{I_1})} = \frac{1}{2}\left(\begin{matrix} \dot{I}_x\omega_x^2 + \dot{I}_y\omega_y^2 + \dot{I}_z\omega_z^2 - \\ -2\dot{I}_{xy}\omega_x\omega_y - \\ -2\dot{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\dot{I}_{zx}\omega_z\omega_x \end{matrix} \right),$$

$$\dot{T}_{\hat{a}\eth}^{(\mathbf{I_2})} = \dot{\omega}_x^{(\mathbf{I})}\left(I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{zx}\omega_z\right) + \\ + \dot{\omega}_y^{(\mathbf{I})}\left(I_y\omega_y - I_{xy}\omega_x - I_{yz}\omega_z\right) + \\ + \dot{\omega}_z^{(\mathbf{I})}\left(I_z\omega_z - I_{yz}\omega_y - I_{zx}\omega_x\right). \tag{15}$$

Чтобы найти оптимальное управление вращением ЛА $\mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}$, надо решить систему уравнений

$$\frac{\partial \dot{T}_{\hat{a}\eth}}{\partial \mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}} = 0, \tag{16}$$

что с учетом (14) аналогично системе уравнений

$$\frac{\partial \dot{T}_{\hat{a}\eth}^{(\mathbf{u})}}{\partial \mathbf{u}_{\hat{\imath}.\ddot{o}.\grave{\imath}}} = 0. \tag{17}$$

При анализе выражений (11) для $\dot{\omega}_x^{(\mathbf{u})}$, $\dot{\omega}_y^{(\mathbf{u})}$, $\dot{\omega}_z^{(\mathbf{u})}$ видно, что у них общий знаменатель, равный D, который можно вынести за скобки. Следовательно, можно записать

$$\dot{T}_{\text{âð}}^{(\mathbf{u})} = \frac{1}{D}\dot{T}_{\text{âð}}^{*}, \tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}\dot{T}_{\text{âð}}^{*} = &\begin{bmatrix}\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)M_x + \left(I_{xz}I_{yz} + I_{xy}I_z\right)M_y + \\ +\left(I_{xy}I_{yz} + I_{xz}I_y\right)M_z\end{bmatrix}\times \\ &\times\left(I_x\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{zx}\omega_z\right) + \\ &+\begin{bmatrix}\left(I_{yz}I_{xz} + I_{xy}I_z\right)M_x + \left(I_x I_z - I_{xz}^2\right)M_y + \\ +\left(I_{xz}I_{xy} + I_{yz}I_x\right)M_z\end{bmatrix}\times \\ &\times\left(I_y\omega_y - I_{xy}\omega_x - I_{yz}\omega_z\right) + \\ &+\begin{bmatrix}\left(I_{xy}I_{yz} + I_{xz}I_y\right)M_x + \left(I_{xy}I_{xz} + I_{yz}I_x\right)M_y + \\ +\left(I_x I_y - I_{xy}^2\right)M_z\end{bmatrix}\times \\ &\times\left(I_z\omega_z - I_{yz}\omega_y - I_{zx}\omega_x\right).\end{aligned} \tag{19}$$

После преобразований выражение (19) можно записать в виде

$$\dot{T}_{\text{âð}}^{*} = D\left(M_x\omega_x + M_y\omega_y + M_z\omega_z\right). \tag{20}$$

Следовательно:

$$\dot{T}_{\text{âð}}^{(\mathbf{u})} = M_x\omega_x + M_y\omega_y + M_z\omega_z \tag{21}$$

или в векторном виде

$$\dot{T}_{\text{âð}}^{(\mathbf{u})} = \mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega}, \tag{22}$$

где $\mathbf{M}\cdot\boldsymbol{\omega}$ — мощность управляющих сил, действующих на ЛА во вращательном движении.

В окончательном виде систему (22) можно записать в виде

$$\frac{\partial\dot{T}_{\text{âð}}^{(\mathbf{u})}}{\partial\mathbf{u}_{\text{î.ö.ì}}} = \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{u}_{\text{î.ö.ì}}}\cdot\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}. \tag{23}$$

Из анализа выражения (23) видно, что при оптимальном управлении вращением ЛА с точки зрения максимизации кинетической энергии вращения угол между векторами **M** и **ω** равен нулю. При заданных органах управления система (23) позволяет получить конкретные программы движения ЛА относительно центра масс и использовать их при баллистическом проектировании ЛА без решения сложных и трудоемких вариационных задач на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина [10].

Для обеспечения оптимального по оперативности вращения ЛА в целях адекватной отработки программного вращения, соответствующего заданной программе движения, в качестве вектора мгновенной угловой скорости вращения крылатых ЛА относительно центра масс при маневрировании в атмосфере целесообразно выбирать

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ïð}} = \dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{ïð}} + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\text{ïð}}, \tag{24}$$

где $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{\text{ïð}}$ — программная скорость изменения скоростного угла крена; $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\text{ïð}}$ — программная скорость изменения полного угла атаки.

При полете ЛА ракетного типа

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{ïð}} = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{ïð}} + \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ïð}}, \tag{25}$$

где $\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\text{ïð}}$ — программная скорость изменения угла атаки; $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\text{ïð}}$ — программная скорость изменения угла скольжения.

Полученная система уравнений (23) позволяет оперативно находить оптимальные направления приложения управляющих усилий рулевых органов управления ЛА при любом их расположении и количестве степеней свободы.

Система уравнений (23) совместно с уравнениями Эйлера в общем виде (11) может быть использована при [6]:

— разработке методов управления движением и навигацией, синтезе алгоритмов наведения и навигации, угловой стабилизации;

— математическом моделировании процессов управления ЛА как абсолютно твердого тела для исследования характеристик создаваемых и эксплуатируемых ЛА;

— проектировании и разработке принципиально новых исполнительных органов ЛА, оптимизации их расположения и угловой ориентации относительно ЛА, определении оптимального числа степеней свободы и предельного диапазона отклонений;

— проектировании и изготовлении бортовых цифровых вычислительных систем;

— создании новых аналого-цифровых комплексов для полунатурного моделирования (в том числе в замкнутом контуре) реального процесса управления движением с оптимальным сочетанием методов натурного и математического моделирования;

— проведении отработки бортовых алгоритмов и программного обеспечения на комплексах полунатурного моделирования с детальным определением точностных характеристик системы управления ЛА;

— создании бортовых систем управления;

— создании наземных проверочно-пусковых комплексов контроля бортовой аппаратуры систем управления, подготовки и пуска ракетно-космических комплексов и авиационно-космических комплексов;

— создании методик и алгоритмов электрических и точностных испытаний систем управления ЛА на всех этапах проектирования.

Современное состояние отечественного ракетостроения характеризуется проведением модернизации парка ракет-носителей (РН). Модернизации существующих РН в первую очередь обусловлены необходимостью замены аналоговых систем управления на систему управления на основе бортовых цифровых вычислительных систем с современной элементной базой и унифицированным программным обеспечением.

Основное условие, которое должно быть выполнено в результате отмеченных модернизаций, — сохранение высокого уровня надежности отечественных РН, обоснованно признанных лучшими в мире по результатам уже не одной тысячи пусков. Исходя из этого к актуальным вопросам повышения эффективности РН средствами систем управления движением относятся минимизация зон падения отработавших первых ступеней, повышенная безопасность полета, особенно на начальном участке, а также решение задач контроля параметров движения в целях выявления опасных ситуаций, в первую очередь связанных с отказами отдельных узлов и агрегатов РН, и формирования адекватных команд.

К числу отказов узлов и агрегатов РН относятся, в частности, и отказы гидравлических рулевых машин первых ступеней РН.

Нормальный режим функционирования рулевых органов системы управления ЛА предусматривает реализацию алгоритма формирования управляющих воздействий на каждый сервопривод в виде [6]

$$\begin{aligned}
u_{\delta_\vartheta} &= u_{\text{ñ.ó}}\left(\vartheta-\vartheta_{\text{ïð}},\ \dot\vartheta-\dot\vartheta_{\text{ïð}},\ \ldots,\ \vartheta^{(n)}-\vartheta^{(n)}_{\text{ïð}}\right);\\
u_{\delta_\psi} &= u_{\text{ñ.ó}}\left(\psi-\psi_{\text{ïð}},\ \dot\psi-\dot\psi_{\text{ïð}},\ \ldots,\ \psi^{(n)}-\psi^{(n)}_{\text{ïð}}\right);\\
u_{\delta_\varphi} &= u_{\text{ñ.ó}}\left(\varphi-\varphi_{\text{ïð}},\ \dot\varphi-\dot\varphi_{\text{ïð}},\ \ldots,\ \varphi^{(n)}-\varphi^{(n)}_{\text{ïð}}\right),
\end{aligned} \tag{26}$$

где ϑ, ψ, φ — углы тангажа, рыскания и собственного вращения РН, являющиеся функциями программных значений углов атаки $\alpha_{\text{пр}}$ и скольжения $\beta_{\text{пр}}$.

Подача управляющего сигнала на соответствующий сервопривод приводит к изменению его состояния в соответствии с дифференциальными уравнениями

$$\dot\delta_i(t) = u_{\text{ð.ì}_i}\left(\delta_i(t),\ u_{\delta_\vartheta},\ u_{\delta_\psi},\ u_{\delta_\varphi}\right), \tag{27}$$

где $i=1(1)k$, k — количество рулевых органов ЛА; $u_{\text{р.м}}$ — функция рулевого механизма.

Возникновение неисправности, как правило, рассматривается в виде модели, согласно которой при отказе одной из рулевых машин она фиксируется в определенном положении: $\delta_i=\text{const}$. Номер отказавшего рулевого привода определяется при использовании соответствующих алгоритмов идентификации аномального состояния рулевых приводов.

В этом случае требуемые угловые ускорения $\dot\omega_x^{\text{òðåá}}$, $\dot\omega_y^{\text{òðåá}}$, $\dot\omega_z^{\text{òðåá}}$, являющиеся функциями рассогласований фактической угловой скорости вращения ЛА и его программной угловой скорости вращения, можно вычислить следующим образом:

$$\begin{cases}
\dot\omega_x^{\text{òðåá}} = \omega_x^{\text{ïð}} - \omega_x^{\text{è}}\\
\dot\omega_y^{\text{òðåá}} = \omega_y^{\text{ïð}} - \omega_y^{\text{è}},\\
\dot\omega_z^{\text{òðåá}} = \omega_z^{\text{ïð}} - \omega_z^{\text{è}}
\end{cases} \tag{28}$$

где $\omega_x^{\text{è}}$, $\omega_y^{\text{è}}$, $\omega_z^{\text{è}}$ — проекции измеренной угловой скорости вращения ЛА.

Для известных значений $\dot\omega_x^{\text{òðåá}}$, $\dot\omega_y^{\text{òðåá}}$, $\dot\omega_z^{\text{òðåá}}$ решается система уравнений (11) по правилу Крамера и определяются требуемые моменты управляющих сил $M_x^{\text{òðåá}}$, $M_y^{\text{òðåá}}$, $M_z^{\text{òðåá}}$.

Углы отклонения работоспособных органов управления ЛА определяются бортовым вычислителем из условия удовлетворения векторного уравнения моментов:

$$\mathbf{M}(\delta_k,\ k\ne i) = \mathbf{M}^{\text{òðåá}} - \mathbf{M}(\delta_i=\text{const}). \tag{29}$$

Таким образом, при отказе отдельных органов управления во внештатных ситуациях можно обеспечить выполнение целевой задачи ЛА.

Заключение

Практические приложения энергетической теории в виде конкретных программ движения ЛА относительно центра масс для синергетических маневров позволяют эффективно использовать их при баллистическом проектировании ЛА без решения сложных и трудоемких вариационных задач на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Разработанный метод определения оперативных оптимальных программ движения ЛА относительно центра масс позволяет на практике решать различные задачи баллистического проектирования перспективных ЛА с новыми органами управления на всех этапах их создания. Данные программы движения относительно центра масс ЛА можно использовать для контроля качества работы систем управления ЛА.

Кроме этого, продемонстрированный принцип в сочетании с принципом определения оптимальных программ движения центра масс ЛА создает единую методологическую базу для исследования различных маневров при рассмотрении ЛА как в виде материальной точки, так и в виде абсолютно твердого тела.

Литература

1. **Насонов В. П.** Нетрадиционный подход к решению традиционных задач динамики полета ракет-носителей / ВИКИ им. А. Ф. Можайского. – СПб., 1992. – 64 с.
2. **Петров И. О.** Проблема определения оперативных оптимальных автономных алгоритмов управления ЛА и пути ее решения // Аэрокосмическое приборостроение. 2012. № 3. С. 14–20.
3. **Петров И. О.** Энергетическая теория синергетического маневрирования // Аэрокосмическое приборостроение. 2012. № 4. С. 10–20.
4. **Петров И. О., Насонов В. П.** Принцип применения энергетической теории к определению оптимальных программ движения ЛА относительно центра масс // Аэрокосмическое приборостроение. 2012. № 7. С. 3–11.
5. **Петров И. О.** Математические модели движения летательных аппаратов во вращающейся атмосфере Земли // Аэрокосмическое приборостроение. 2012. № 9. С. 10–20.
6. **Аверкиев Н. Ф., Волков В. Ф., Петров И. О.** Баллистическое проектирование РН: учеб. пособие / ВИКУ им. А. Ф. Можайского. – СПб., 1999. – 72 с.
7. **Петров И. О.** Принцип применения энергетической теории к выбору оптимальных адаптивных программ движения летательных аппаратов // Аэрокосмическое приборостроение. 2013. № 1. С. 13–19.
8. **Тарг С. М.** Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 416 с.
9. **Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р.** Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
10. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1983. – 392 с.

UDC 629.191

A Method for Determination of Optimal Operational Programs of Aircraft Movement in Relation to the Center of Mass

Petrov I. O.[a], PhD, Tech., Associate Professor, petrovigor63@mail.ru
[a]Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaia St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Purpose: The analysis of the known methods of calculation programmes for aircraft movement in relation to the center of mass has shown that they are based on simplified models of aircrafts and they are not optimal in terms of maximizing a rate of change of kinetic energy of rotation. The purpose of the paper is to develop a new method for determination of optimal operational programs of aircraft movement in relation to the center of mass. **Methods:** There has been used a method of determining control based on energy principle. **Results:** There has been developed and described a mathematical model of aircraft movement in relation to the center of mass with full tensor of inertia in a form of Euler differential equations. There has been substantiated a new approach to determination of optimal operational programs of aircraft movement in relation to the center of mass based on the energy theory of maneuvering. The essence of the approach is to maximize power of surface control forces in relation to an instantaneous axis of aircraft rotation. **Practical relevance:** The research results for synergistic maneuvers are effective for ballistic design of aircrafts without addressing complex and labor-consuming variation tasks based on the principle of Pontryagin maximum.

Keywords — Aircraft, Maneuvering, Operative Optimal Control, Energy Theory, Kinetic Energy of Rotation, Power of Surface Forces, Euler Dynamic Equations.

References

1. Nasonov V. P. *Netraditsionnyi podkhod k resheniiu traditsionnykh zadach dinamiki poleta raket-nositelei* [Non-Traditional Approach to the Traditional Tasks of Flight Dynamics of Launch Vehicles]. SaintPetersburg, VIKI im. A. F. Mozhaiskogo Publ., 1992. 64 p. (In Russian).
2. Petrov I. O. Problem of Definition of Operational Optimum Autonomous Algorithms of Management of Aircraft and Way of its Decision. *Aerokosmicheskoe priborostroenie*, 2012, no. 3, pp. 14–20 (In Russian).
3. Petrov I. O. Power Theory of Synergetic Maneuvering. *Aerokosmicheskoe priborostroenie*, 2012, no. 4, pp. 10–20 (In Russian).
4. Petrov I. O., Nasonov V. P. The Principle of Application of the Power Theory to Definition of Optimum Programs of Movement Aircraft Concerning the Center of Masses. *Aerokosmicheskoe priborostroenie*, 2012, no. 7, pp. 3–11 (In Russian).
5. Petrov I. O. Mathematical Models of Movement of Aircraft in the Rotating Atmosphere of Earth. *Aerokosmicheskoe priborostroenie*, 2012, no. 9, pp. 10–20 (In Russian).
6. Averkiev N. F., Volkov V. F., Petrov I. O. *Ballisticheskoe proektirovanie RN* [Ballistic Design of Launch Vehicles]. SaintPetersburg, VIKU im. A. F. Mozhaiskogo Publ., 1999. 72 p. (In Russian).
7. Petrov I. O. The Principle of Application of the Power Theory to a Choice of Optimum Adaptive Programs of Movement of Aircraft. *Aerokosmicheskoe priborostroenie*, 2013, no. 1, pp. 13–19 (In Russian).
8. Targ S. M. *Kratkii kurs teoreticheskoi mekhaniki* [Short Course of Theoretical Mechanics]. Moscow, Vysshaia shkola Publ., 1986. 416 p. (In Russian).
9. Butenin N. V., Lunch J. L., Merkin D. R. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* [Course of Theoretical Mechanics]. Saint-Petersburg, Lan' Publ., 2009. 736 p. (In Russian).
10. Pontrjagin L. S., Boltjanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mishenko E. F. *Matematicheskaia teoriia optimal'nykh protsessov* [Mathematical Theory of Optimum Processes]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 392 p. (In Russian).