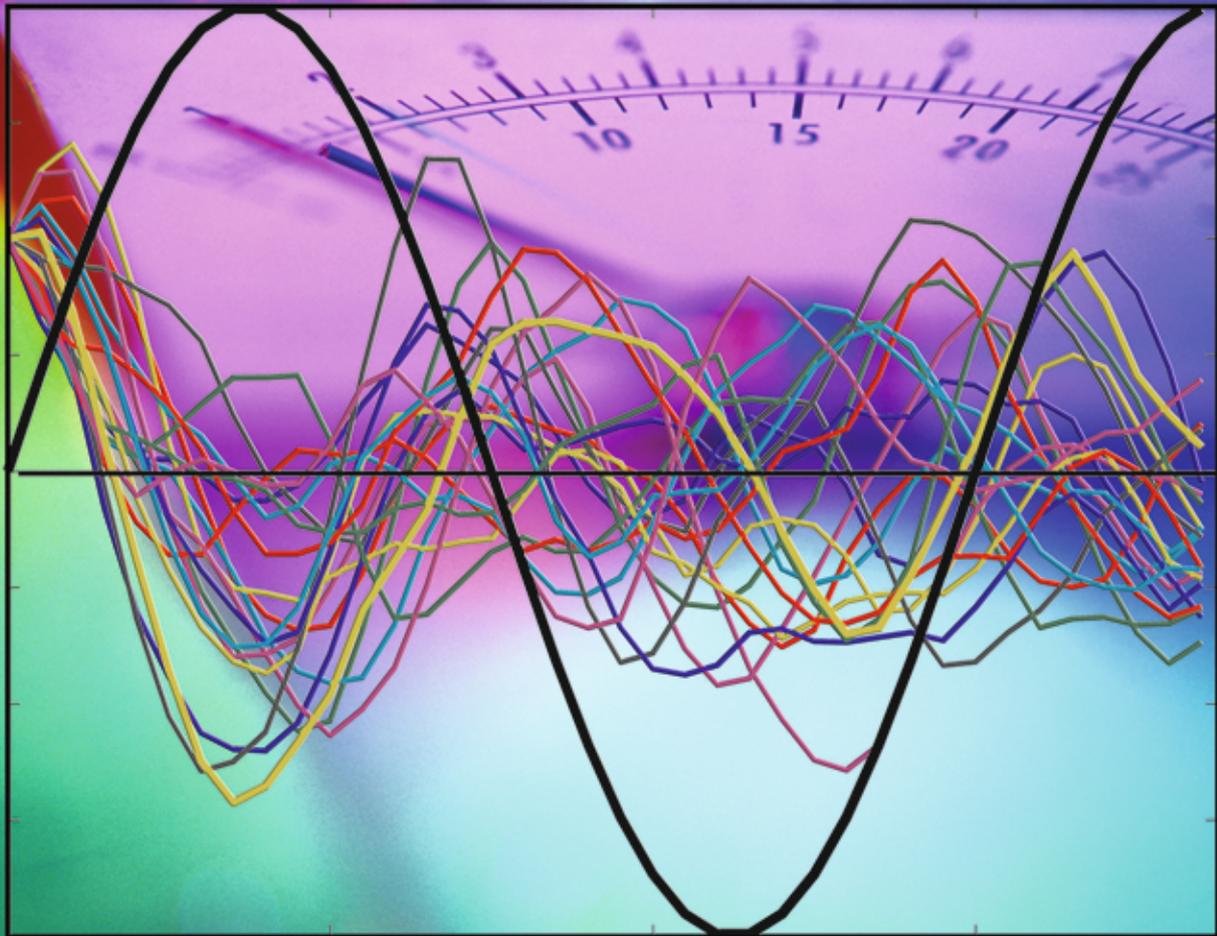


# ИНФОРМАЦИОННО- УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



2(27)/2007

2(27)/2007

# ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

РЕЦЕНЗИРУЕМОЕ ИЗДАНИЕ

**Главный редактор**

М. Б. Сергеев,  
доктор технических наук, профессор

**Зам. главного редактора**

Г. Ф. Мощенко

**Редакционный совет:**

**Председатель** А. А. Оводенко,  
доктор технических наук, профессор  
В. Н. Васильев,  
доктор технических наук, профессор  
В. Н. Козлов,  
доктор технических наук, профессор  
Ю. Ф. Подоплекин,  
доктор технических наук, профессор  
Д. В. Пузанков,  
доктор технических наук, профессор  
В. В. Симаков,  
доктор технических наук, профессор  
А. Л. Фрадков,  
доктор технических наук, профессор  
Л. И. Чубраева,  
доктор технических наук, профессор, чл.-корр. РАН  
Р. М. Юсупов,  
доктор технических наук, профессор, чл.-корр. РАН

**Редакционная коллегия:**

В. Г. Анисимов,  
доктор технических наук, профессор  
Е. А. Крук,  
доктор технических наук, профессор  
В. Ф. Мелехин,  
доктор технических наук, профессор  
А. В. Смирнов,  
доктор технических наук, профессор  
В. И. Хищенко,  
доктор технических наук, профессор  
А. А. Шальто,  
доктор технических наук, профессор  
А. П. Шепета,  
доктор технических наук, профессор  
З. М. Юлдашев,  
доктор технических наук, профессор

**Редактор:** А. Г. Ларионова

**Корректор:** Т. В. Звертановская

**Дизайн:** М. Л. Черненко

**Компьютерная верстка:** Т. М. Каргапольцева

**Ответственный секретарь:** О. В. Муравцова

**Адрес редакции:** 190000, Санкт-Петербург,

Б. Морская ул., д. 67

Тел.: (812) 494-70-36

Факс: (812) 494-70-18

E-mail: 80x@mail.ru; ius@aanet.ru

Сайт: www.i-us.ru

Журнал зарегистрирован

в Министерстве РФ по делам печати,

телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-12412 от 19 апреля 2002 г.

Журнал распространяется по подписке.

Подписку можно оформить через редакцию, а также

в любом отделении связи по каталогам:

«Пресса России» – № 42476;

«Роспечать» («Газеты и журналы») – № 15385

**ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЕ**

**Воробьев С. Н.** Пересечение гауссова процесса с неслучайным уровнем 2

**Тихонов Э. П.** Аналитико-имитационное исследование и оптимизация алгоритмов аналого-цифрового преобразования в условиях воздействия помех (Часть 1) 12

**Обухова Н. А.** Предварительная классификация изображения в задачах сегментации объектов 22

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ**

**Субочев С. Д.** Построение оптимальных траекторий в многомерных пространствах на основе физических моделей 29

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ КАНАЛЫ И СРЕДЫ**

**Рыжиков Ю. И.** Расчет систем обслуживания с групповым поступлением заявок 39

**Мальцев Г. Н., Цветков М. В.** Принятие решения об остаточном ресурсе технической системы с использованием риск-анализа 50

**ХРОНИКА И ИНФОРМАЦИЯ**

VI Международная конференция «Авиация и космонавтика-2007» 56

XI Международный симпозиум по проблеме избыточности в информационных системах 58

**СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**

60

**АННОТАЦИИ**

62

ЛР № 010292 от 18.08.98.

Сдано в набор 02.03.07. Подписано в печать 11.04.07. Формат 60×90/8. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookC. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 9,0. Тираж 1000 экз. Заказ 160.

Оригинал-макет изготовлен в редакционно-издательском центре ГУАП. 190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67.

Отпечатано с готовых диапозитивов в редакционно-издательском центре ГУАП. 190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67.

УДК 519.2

## ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ГАУССОВА ПРОЦЕССА С НЕСЛУЧАЙНЫМ УРОВНЕМ

**С. Н. Воробьев,**

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Функция и плотность распределения времени пересечения гауссовым процессом неслучайного уровня находятся с использованием двумерного нормального распределения. В устройствах измерения времени прихода импульсного сигнала с большой вероятностью пересечение заданного уровня оказывается единственным. Приводятся примеры расчета и моделирования плотности распределения времени первого пересечения.

The distribution function and the density function of the crossing time for a Gaussian process at a nonrandom level is found with the help of two-dimensional normal distribution. In the systems of time measurement the moment of signal arrival with big probability of intersection turns out to be unique. Examples of estimation and simulation modeling of the first crossing time density function are considered.

### Введение

Актуальность проблемы пересечения случайным процессом заданного уровня подробно обсуждена в обзоре [1]. Один из ее аспектов, являющийся теоретической базой систем измерения дальности, — нахождение закона распределения времени первого пересечения. На практике широко используется приближенное решение этой задачи — аппроксимация нормальным распределением [2], справедливая при большом отношении сигнал/шум. Решение задачи первого пересечения для марковской модели приведено в статьях [3, 4].

Цель работы — распространение методики расчета плотности распределения времени пересечения уровня марковским процессом [3] на случай произвольных гауссовых процессов. Если скорости флуктуаций шума и изменений значений фронта импульсного сигнала близки, что наблюдается в реальных радиоэлектронных системах, с большой вероятностью пересечение оказывается единственным. Тогда возможен простой и достаточно точный практический расчет плотности распределения времени прихода импульсного сигнала.

### Пересечение уровня нестационарным гауссовым процессом

Если случайный процесс  $x(t)$  начинается в точке  $x_0$  ( $x(t=0) = x_0$ ) и известна условная плотность распределения  $f(x, t | x_0)$  его значения в момент времени  $t > 0$ , вероятность пересечения неслучайного уровня  $u(t)$  на интервале  $(0, t)$  сверху вниз и снизу вверх равна

$$p\{t_0 \leq t | x_0\} = P(t_0 | x_0) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{u(t)} f(x, t | x_0) dx, & x_0 > u_0, \\ \int_{u(t)}^{\infty} f(x, t | x_0) dx, & x_0 < u_0. \end{cases} \quad (1)$$

Монотонно возрастающая вероятность (1) есть условная функция распределения. Однако в общем случае на интервале  $(0, t)$  уровень может пересекаться неоднократно, поэтому необходим конкретный анализ вероятности  $P(t_0 | x_0)$ .

В радиоэлектронике широко используется модель стационарного гауссова шума  $n(t) \in N(0, R(\tau))$ ,  $R(\tau)$  — функция корреляции (далее положено  $\sigma^2 = 1$ ). Если начальное значение шума равно  $n_0 = x_0$ , то процесс  $x(t) = n(t | x_0) \in N(m(t), \sigma(t))$ ,  $m(t) = x_0 R(t)$ ,  $\sigma^2(t) = 1 - R^2(t)$ . Условная вероятность (1) в этом случае равна

$$P(t_0 | x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{u(t_0)} \exp\left\{-\frac{(x - m(t_0))^2}{2\sigma(t_0)}\right\} dx = \Phi\left(\frac{u(t_0) - m(t_0)}{\sigma(t_0)}\right), \quad (2)$$

где  $\Phi(v)$  — интеграл вероятности. Условная плотность вероятности (2)

$$p(t_0 | x_0) = P'(t_0 | x_0) = \frac{\varphi(t_0)}{\sqrt{2\pi}\sigma(t_0)} \exp\left\{-\frac{(u(t_0) - m(t_0))^2}{2\sigma^2(t_0)}\right\}; \quad (3)$$

$$\varphi(t_0) = \left(\frac{u(t_0) - m(t_0)}{\sigma(t_0)}\right)'. \quad (4)$$

Неравенство

$$\varphi(t_0) > 0 \quad (5)$$

является условием существования плотности (3) при пересечении сверху вниз. При пересечении снизу вверх плотность (3) записывается со знаком минус, неравенство (5) меняется на обратное.

**Пример 1.** Гауссов процесс с математическим ожиданием  $m(t) = 0$  и функцией корреляции

$$R(\tau) = \exp(-\alpha\tau) \left( \cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta\tau \right), \quad (6)$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = \frac{4}{3}\pi,$$

начинающийся в точке  $x_0 = 1$ , пересекает сверху вниз уровни  $u_1(t) = t - 1,5$  (рис. 1, а, линия 1) и  $u_2(t) = 2t - 2,5$  (рис. 1, б, линия 1). Производные (4)

$$\varphi_1(t_0) = \frac{u_1(t_0) - R(t_0)}{\sqrt{1 - R^2(t_0)}}, \quad \varphi_2(t_0) = \frac{u_2(t_0) - R(t_0)}{\sqrt{1 - R^2(t_0)}}$$

показаны на рис. 1, а, кривая 2; 2, б, кривая 2. Для менее крутого уровня  $u_1(t_0)$  на интервале  $(t_1, t_2)$  производная отрицательна, плотность (3) не является плотностью распределения. Условие (5) выполняется для более крутого уровня  $u_2(t_0)$ .

Вероятности (2) (рис. 2, а, б) достигают значения  $P = 1$ .

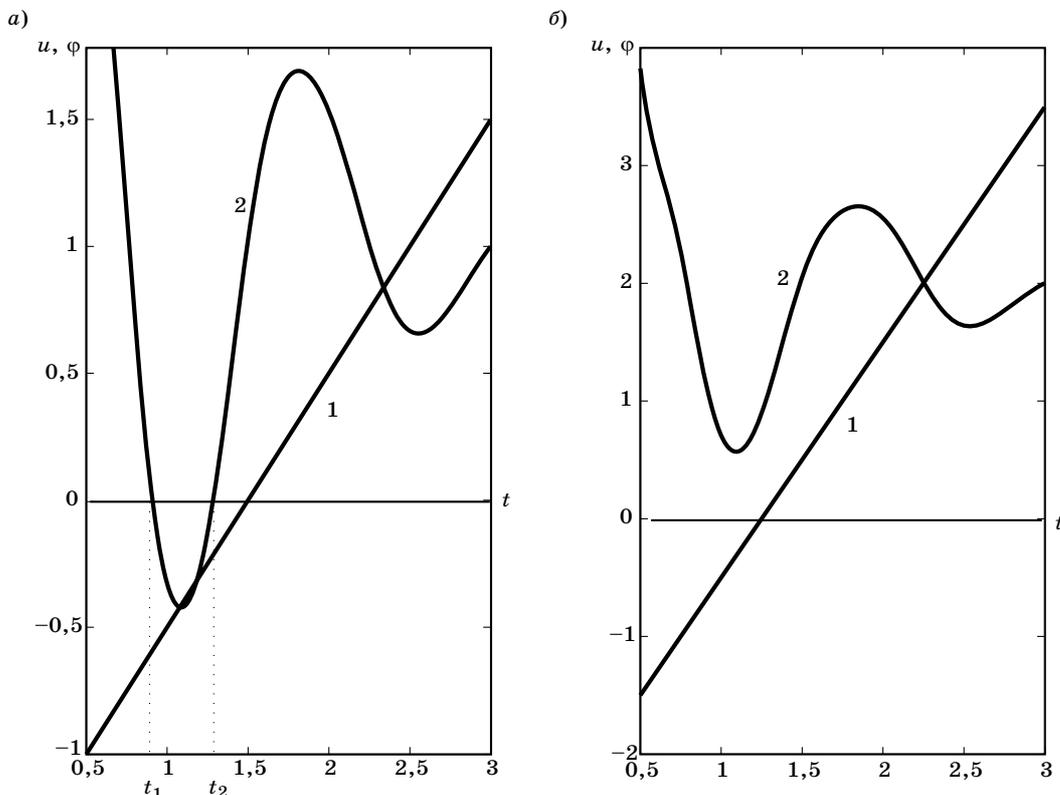
Для уровня  $u_1(t)$  вероятность (2) нарастает не монотонно, что приводит к разрыву плотности (3), показанному на рис. 2, в. В другом случае (рис. 2, б, г)

$$P(t_0 | x_0) = F(t_0 | x_0), \quad p(t_0 | x_0) = f(t_0 | x_0)$$

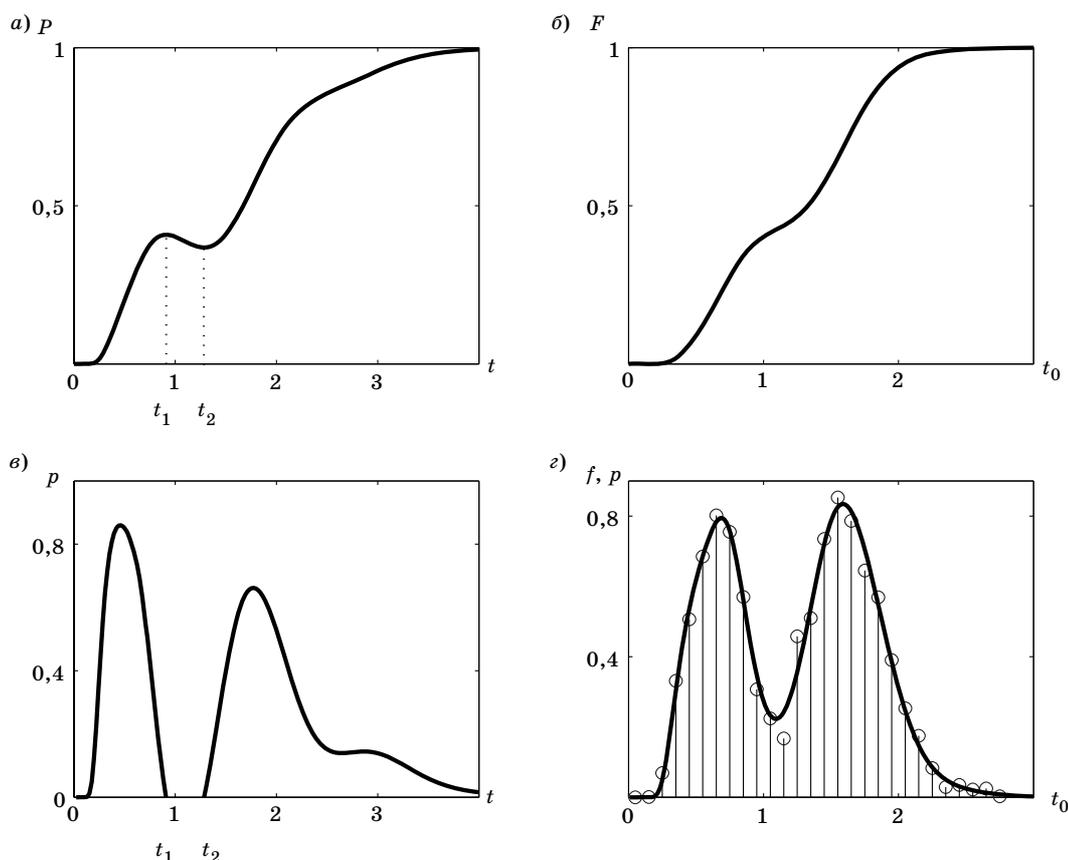
— условные функция и плотность распределения времени пересечения уровня  $u_2(t)$  гауссовым процессом с функцией корреляции (6), начинающимся в точке  $x_0 = 1$ . На рис. 2, г штрихами показаны также оценки плотности (3), полученные численным дифференцированием оценок вероятности (2)

$$\hat{P} = N_t / N,$$

где  $N_t$  — число траекторий, которые к моменту  $t_0$  достоверно пересекли уровень:  $x(t_0) < u(t_0)$ ; размер выборки  $N = 10\,000$  траекторий. Расчеты выполнены в пакете SYMBOLIC MATH, моделирова-



■ Рис. 1. Производные, плотности условной вероятности



■ Рис. 2. Вероятности, плотности вероятности

ние — в пакете SIGNAL PROCESSING системы MATLAB [5].

**Пример 2.** Уровень  $u(t) = 4 \sin(2\pi/3)t$  (рис. 3) на интервале времени  $(0, 4)$  пересекается процессом с функцией корреляции (6),  $x_0 = 2$ .

Траектории пересекают уровень сверху вниз дважды, один раз — снизу вверх. Условные вероятности (2)  $P\{x(t) < u(t)\}$  и  $P\{x(t) > u(t)\}$  показаны на рис. 4, а, б, соответствующие плотности (3) — на рис. 4, в, г. Нарастающие от нуля до единицы участки вероятности — функции распределения; соответствующие неотрицательные плотности — плотности распределения времени пересечения.

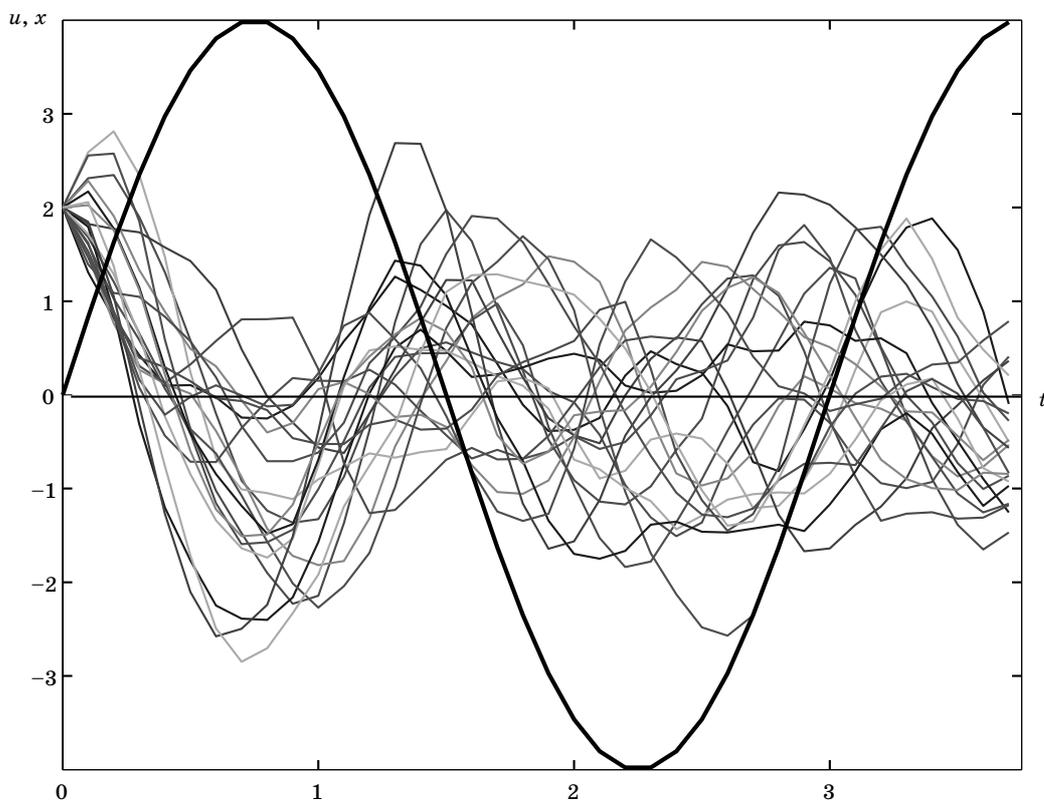
Условные траектории процесса  $\mathbf{X} | x_0$  генерировались как гауссовы последовательности со средними  $\mathbf{M}[\mathbf{X} | x_0] = x_0 \mathbf{R}$  и условной корреляционной матрицей  $\mathbf{B} | x_0$  с элементами

$$b'_{ij} = b_{ij} \sqrt{(1-r_i^2)(1-r_j^2)}, \quad b'_{11} = b'_{1j} = 0,$$

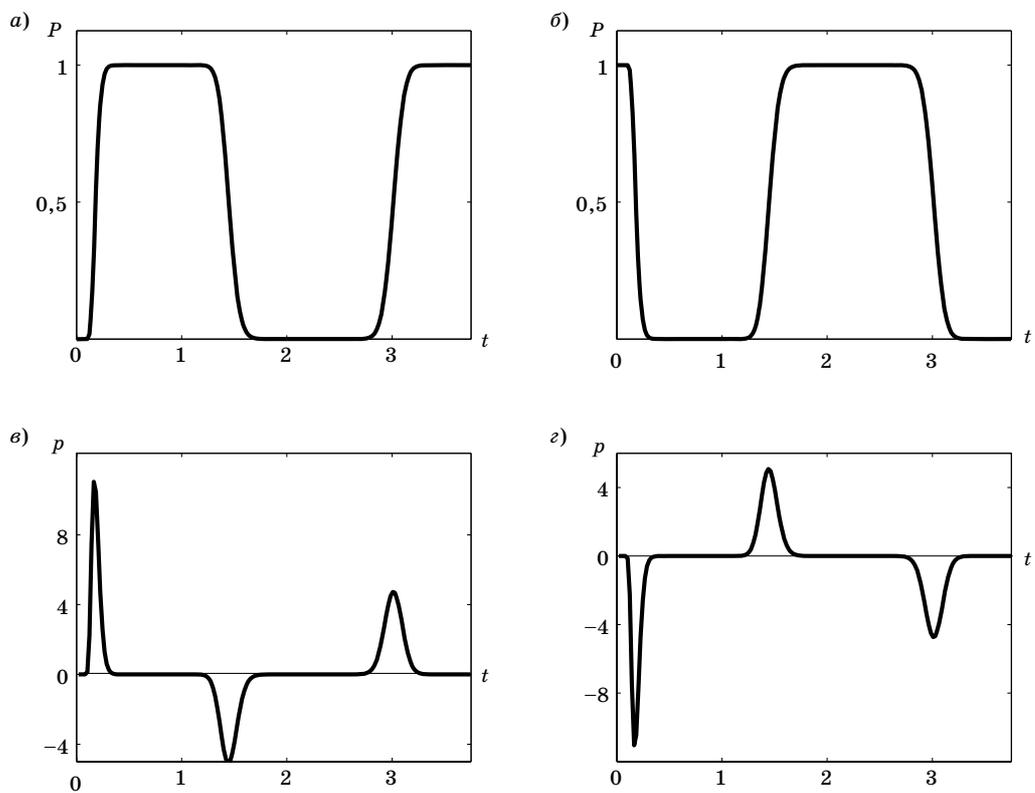
где  $\mathbf{R}$  — вектор отсчетов функции корреляции;  $b_{ij}$  — элементы корреляционной матрицы  $\mathbf{B}$  стационарного процесса. Оператор окрашивания исходных последовательностей, генерируемых функцией RANDN [5], рассчитывался на базе сингулярного разложения матрицы  $\mathbf{B} | x_0$ , что минимизирует методические погрешности генератора [6].

Условная плотность (3) обобщает плотность распределения времени пересечения постоянного уровня гауссовым марковским процессом с функцией корреляции  $R_m(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)$ , полученную в работе [3], на произвольный уровень. Пример пересечения уровня  $u \neq \text{const}$  марковским процессом приведен на рис. 5: траектории с  $\alpha = 2$ ,  $x_0 = 1$ , уровень  $u(t) = 6 \cos \frac{2\pi}{3}t - 3$  (рис. 5, а); плотность (3) и гистограмма времени пересечения (рис. 5, б).

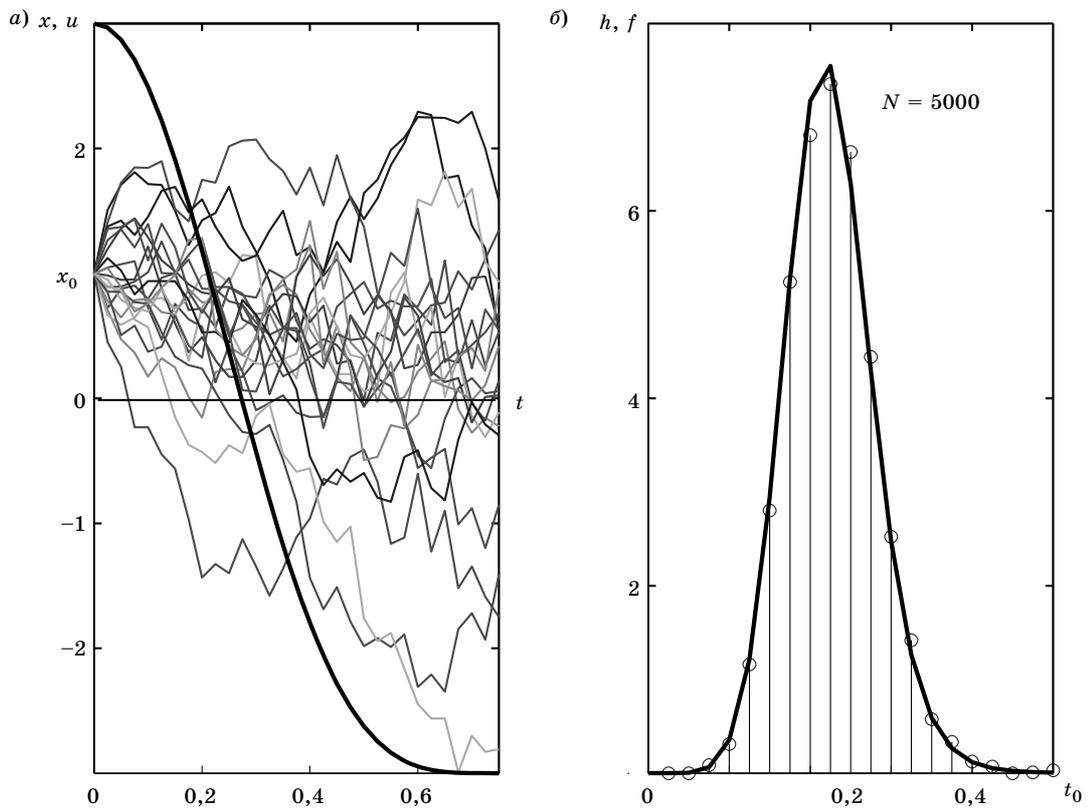
Модель двумерной нормальной плотности, использованная в данной работе и в [3], естественно описывает марковский процесс. Применимость этой модели для немарковского процесса означает, что стационарный немарковский процесс можно трактовать как марковский с функцией корреляции с переменным коэффициентом  $A = \varphi(\tau)$ . Типовые функции корреляции стационарных процессов вида  $R(\tau) = \exp(-\alpha|\tau|)\varphi(\tau)$  можно представить марковской формой  $R_M(\tau) = \exp(-A|\tau|)$  с показателем  $A = \alpha - \ln|\varphi(\tau)|^{1/\tau}$ . Например, функцию корреляции (6) можно записать  $R(\tau) = (-1)^k \exp\{-A\tau\}$ , где коэффициент  $A = \alpha - \ln|\cos\beta\tau + \alpha/\beta\sin\beta\tau|^{1/\tau}$  (рис. 6, а);  $k = \text{fix}(4(\tau - \tau_0)/3)$  — целая часть чис-



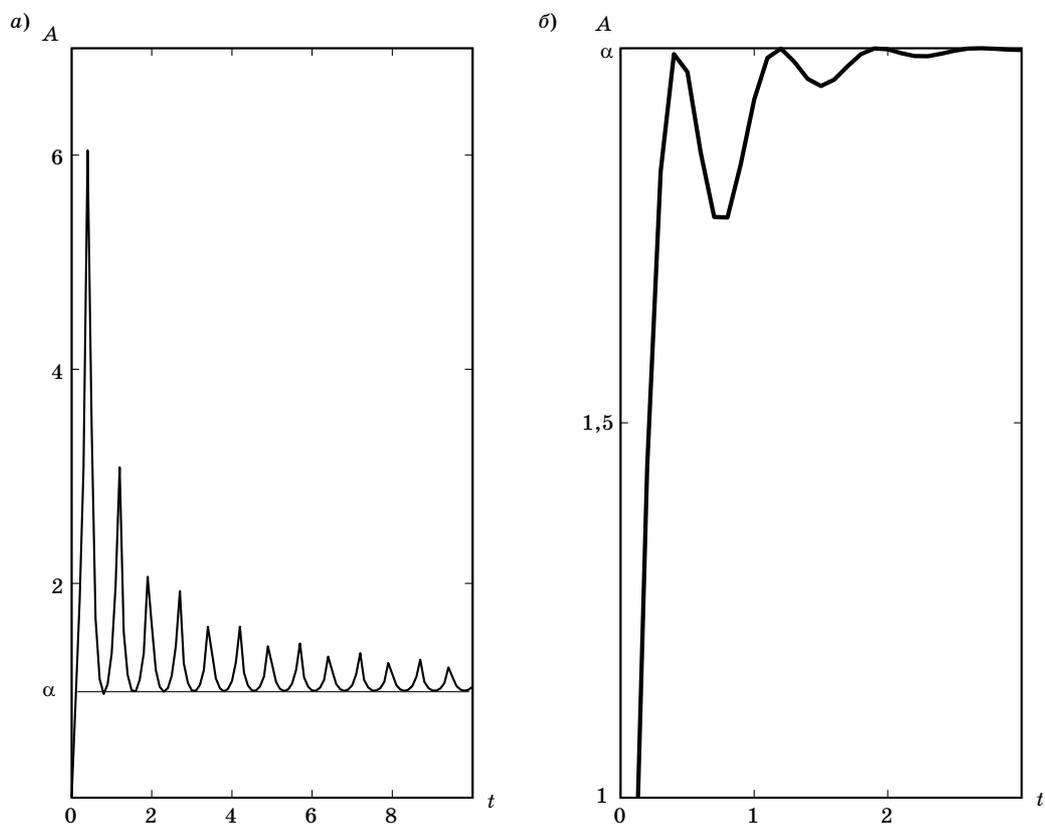
■ Рис. 3. Траектории, уровень



■ Рис. 4. Вероятности и плотности времени пересечения



■ Рис. 5. Пересечение уровня марковским процессом



■ Рис. 6. Коэффициент A

ла,  $\tau_0 = \beta^{-1} \arccos\left(-\alpha/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)$ , так что функция корреляции на интервалах  $(0, \tau_0)$ ,  $(\tau_0 + 3/4, \tau_0 + 6/4)$ , ... положительна, на интервалах  $(\tau_0, \tau_0 + 3/4)$ ,  $(\tau_0 + 6/4, \tau_0 + 9/4)$ , ... — отрицательна (перемена знака корреляционных моментов свойства марковости не нарушает). Показатель  $A = \alpha - \ln|1 + \tau|^{1/\tau}$  марковского представления корреляционной функции  $R(\tau) = (1 + \tau)\exp(-\alpha\tau)$ ,  $\alpha = 2$ , показан на рис. 6, б.

С ростом времени  $A \rightarrow \alpha$  ( $R(\tau) \rightarrow \exp(-\alpha|\tau|)$ ): в первом случае — с затухающими колебаниями с периодом  $T = \pi/\beta$ , во втором — аperiodически.

При расчете условной вероятности (2) для каждого значения времени  $t_0$  используется соответствующее значение коэффициента  $A$ , что равносильно расчету вероятности для нового марковского процесса. Таким образом, в задаче пересечения немарковский гауссов процесс эквивалентен множеству независимых марковских процессов с показателями, соответствующими значению времени  $t_0$ .

Эквивалентностью стационарного процесса множеству марковских процессов можно объяснить появление участков немонотонности условной вероятности (2) (см. рис. 2, а). При небольшой крутизне уровня  $u(t)$  вероятность его пересечения к моменту  $t_0$  на некоторых интервалах времени может уменьшаться за счет флуктуаций показателя  $A$ : условное математическое ожидание процесса и уровень сближаются немонотонно с флуктуирующей дисперсией. Вероятность (2) может трактоваться как функция распределения при условии ее монотонного возрастания.

### Пересечение уровня стационарным гауссовым процессом

Пересечение уровня стационарным гауссовым процессом представляет интерес в задаче измерения времени прихода импульсного сигнала. Если вероятность (2) — условная функция распределения, то ее усреднение по множеству начальных значений дает функцию распределения времени пересечения  $t_0$  стационарным процессом  $n(t) \in N(0, R(\tau))$  с дисперсией  $\sigma^2 = 1$ :

$$\begin{aligned} F(t_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_0^2}{2}\right) \Phi\left(\frac{u(t_0) - x_0 R(t_0)}{\sigma(t_0)}\right) dx_0 = \\ &= |x_0 R(t_0) = v| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{v^2}{2R^2(t_0)}\right) \Phi\left(\frac{u(t_0) - v}{\sigma(t_0)}\right) dv = \\ &= \Phi\left(\frac{u(t_0)}{\sqrt{R^2(t_0) + \sigma^2(t_0)}}\right) = \Phi(u(t_0)). \end{aligned} \quad (7)$$

Плотность распределения времени пересечения

$$f(t_0) = F'(t_0) = \frac{u'(t_0)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2(t_0)}{2}\right). \quad (8)$$

**Пример 3.** На выходе системы с весовой функцией

$$h(t) = \exp(-\alpha t) \sin \beta t, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 4\pi/3,$$

функция корреляции шума (на входе — белый шум) имеет вид (6), входной прямоугольный сигнал с амплитудой  $A$  трансформируется в сигнал [6]

$$s(t) = A(1 - R(t)).$$

Уровень задается в форме переднего фронта сигнала

$$u(t) = s(t) - s_{\max}/2, \quad s_{\max} = s(T) = A(1 + \exp(-3/4)), \quad (9)$$

где  $T = 3/4$  — длительность фронта; математическое ожидание пересекающего (сверху вниз) стационарного шума равно нулю. Такая схема расчета [2] эквивалентна пересечению снизу вверх уровня  $u = s_{\max}/2$  суммой сигнала и шума. На рис. 7, а, кривые 1 и 2, изображены уровни (9), соответствующие значениям отношения сигнал/шум  $d = A/\sigma = A = 3$  и  $d = 5$ .

На рис. 7, б, кривые 1, 2 — монотонная условная функция распределения (2) и производная (4) для начальной точки траектории шума  $x_0 = 2$ ; кривые 3, 4 — то же для  $x_0 = -2$ . Пересечение сверху вниз с вероятностью 1 происходит при  $t_0 \leq T$ , выполнение неравенства (5) при  $t_0 < T$  показывает существование условной плотности (3). Условные плотности распределения времени пересечения  $t_0$  показаны на рис. 8: 1 — для  $x_0 = -2$ ; 2 — для  $x_0 = -1$ ; 3 — для  $x_0 = 1$ ; 4 — для  $x_0 = 2$ . Безусловная плотность (8) (рис. 8, кривая 5)

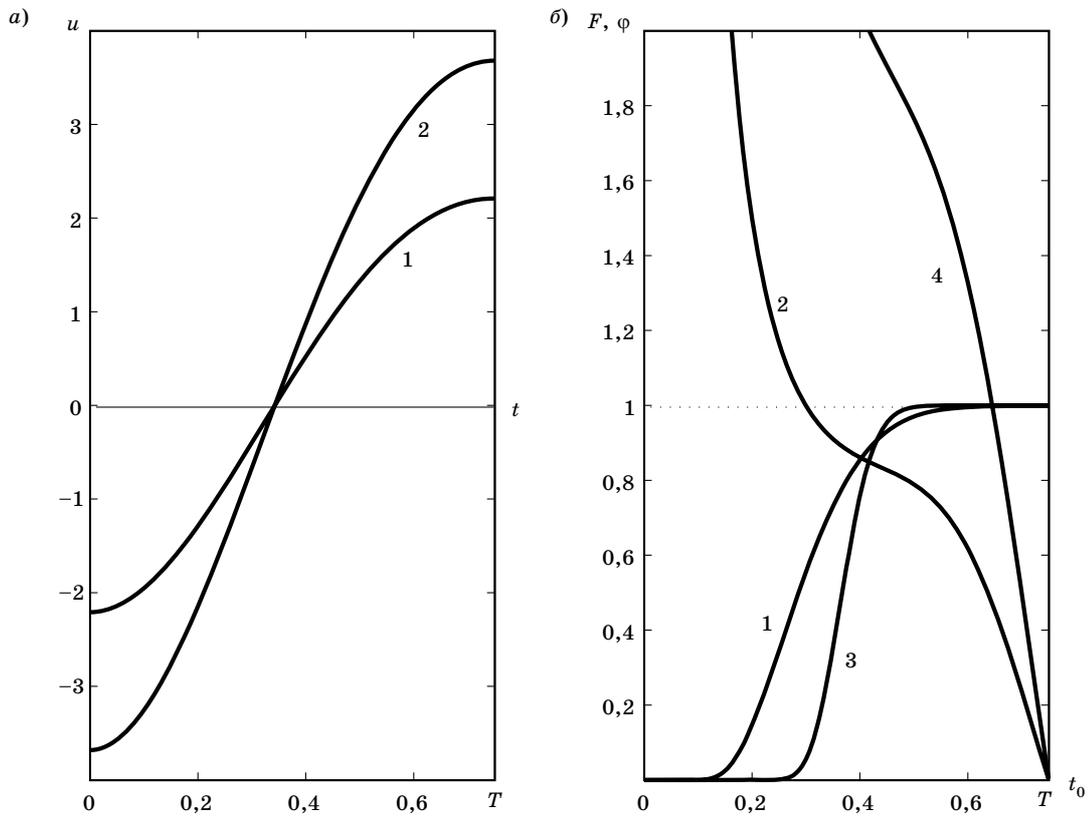
$$f(t_0) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 + \beta^2}{\beta} \exp\left(-\frac{u^2(t_0)}{2} - t_0\right) \sin \beta t_0,$$

$$\beta = 4\pi/3. \quad (10)$$

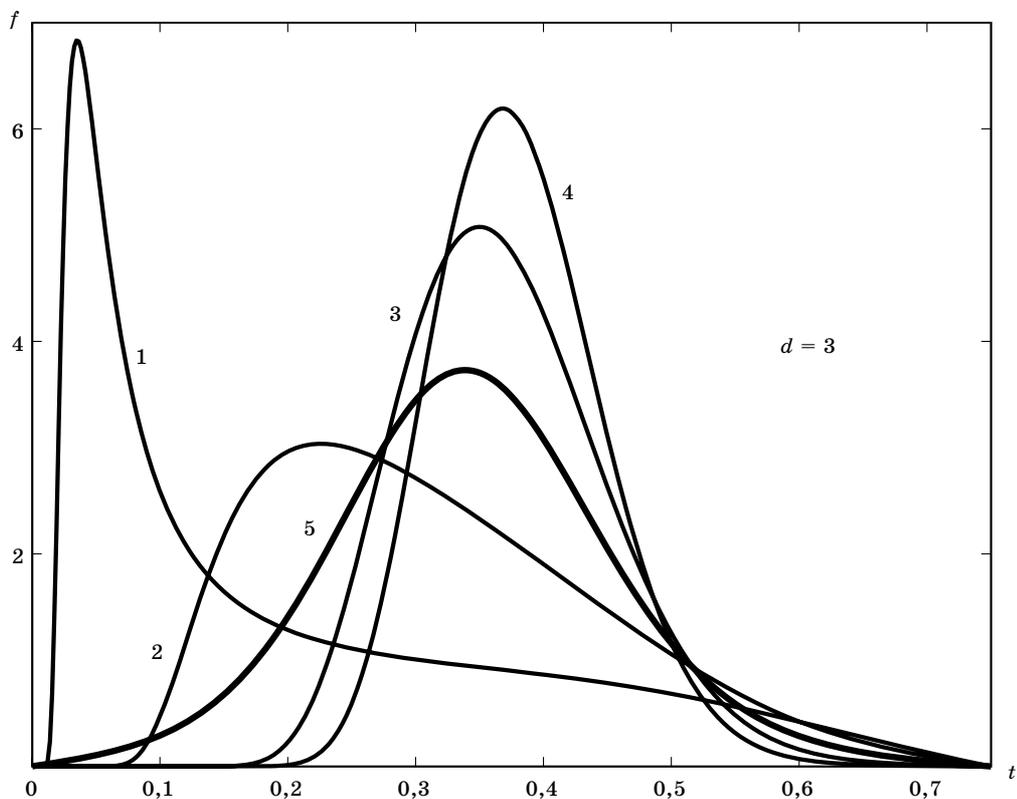
Вероятность (2) учитывает все пересечения, в том числе неоднократные пересечения уровня одной траекторией. Если процесс  $x(t)$  флуктуирует быстрее, чем изменяется уровень  $u(t)$ , возможны неоднократные пересечения; если скорости изменения функций  $x(t)$  и  $u(t)$  соизмеримы, возможно единственное пересечение. Тогда функция распределения (7) описывает первое пересечение. В задаче измерения времени прихода уровнем  $u(t)$  может описываться фронт сигнала или дискриминационная характеристика [2, 7], крутизна которых соизмерима с крутизной траектории шума  $x(t)$ . В этом случае функции (7) и (8) — приближения функции и плотности распределения времени первого пересечения.

**Пример 4.** Для фиксирования пересечений уровня  $U$  траекторией  $X$  в пакете SIGNAL PROCESSING вычислялся индикатор

$$I_t = \text{diff}(\text{sign}(X - U)).$$



■ Рис. 7. Уровни, функции распределения



■ Рис. 8. Плотности распределения

Пример четырехкратного пересечения уровня (9) при  $A = 1/2$  приведен на рис. 9, а. Отрицательные выбросы индикатора (рис. 9, б) формируются в моменты  $j$  дискретного времени, когда наблюдаются переходы от  $x_{j-1} > u_{j-1}$  к  $x_j < u_j$ .

На рис. 10 показаны плотность (10) и гистограмма времени пересечения уровня (9) стационарными траекториями. Из  $N = 10\,000$  сформированных траекторий были исключены ни разу не пересекающие уровень и траектории с начальной точкой  $x_1 < u_1$ , так что остались  $N_{\pi} = 9752$  реализации. Пересечений сверху вниз оказалось  $N_1 = 9769$ , 17 траекторий пересекли уровень неоднократно.

Подсчет числа  $n$  неоднократных пересечений уровня (9) стационарными траекториями позволил оценить вероятность такого события (таблица). Использовались  $N_{\pi}$  реализаций.

$N = 10\,000$

$d$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$N_{\pi}$	6352	7671	8679	9290	9697	9856	9960	9982
$\hat{p}\{n \geq 2\}$	0,023	0,017	0,010	0,008	0,004	0,002	0,001	<0,001

Вероятность трехкратных и более пересечений  $\hat{p}\{n \geq 3\} = 0,002$ , вероятность четырехкратных пересечений  $\hat{p}\{n \geq 4\} < 0,001$  при  $d = 0,5$ . При измерении времени прихода пересечением передним фронтом импульсного сигнала его половинного уровня  $u = s_{\max} / 2$  минимальное отношение сиг-

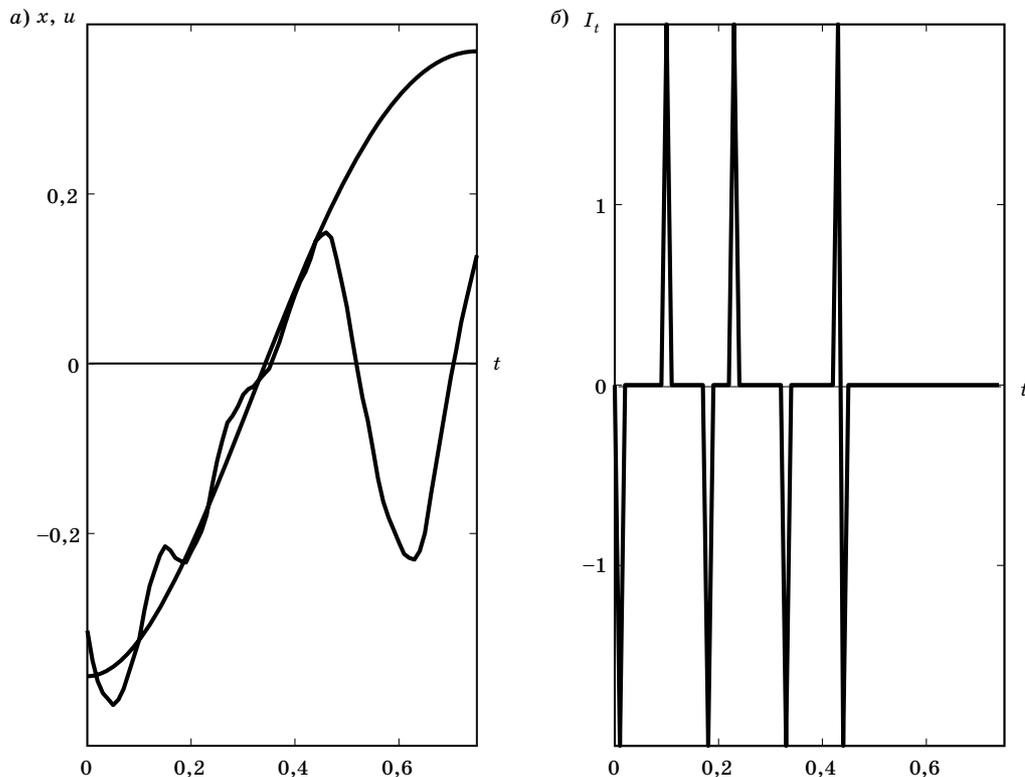
нал/шум  $d_{\min}$  должно быть таким, чтобы вероятность пересечения при отсутствии сигнала была мала. Для сигнала (9) требуется  $d_{\min} > 4$ , следовательно, неоднократные пересечения маловероятны, расчет времени первого пересечения по формулам (7) и (8) допустим.

**Пример 5.** На входе фильтра нижних частот Баттерворта четвертого порядка [4] прямоугольный сигнал в белом шуме. На рис. 11, а показаны передний фронт сигнала  $s(t)$  на выходе фильтра (кривая 1) и несколько стационарных траекторий,  $d = 6$ ,  $\Delta = 0,1$ . Время прихода сигнала  $t_0$  фиксировалось по первому пересечению траектории с уровнем  $u = d/2$  (рис. 11, а, линия 2). Из 10 000 траекторий уровень пересекли 9995. Плотность распределения времени  $t_0$

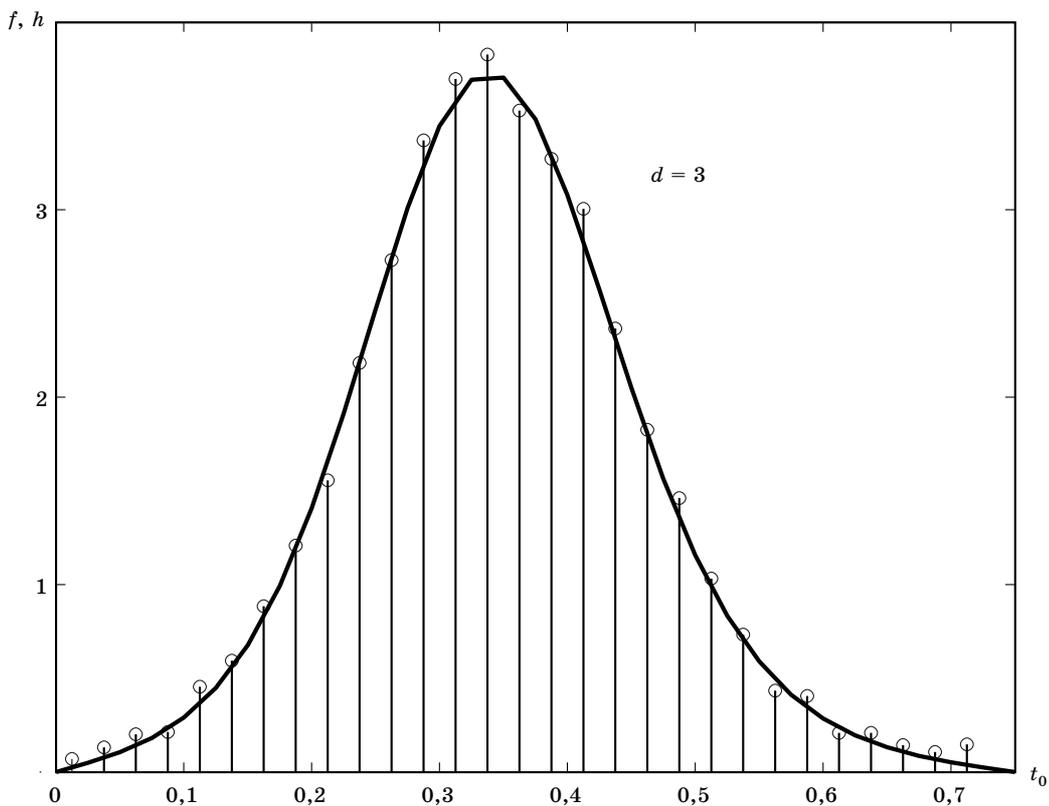
$$f(t_0) = \frac{s'(t_0)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(u - s(t_0))^2}{2}\right), \quad (11)$$

смещенная на интервал  $\Delta$ , и гистограмма показаны на рис. 11, б.

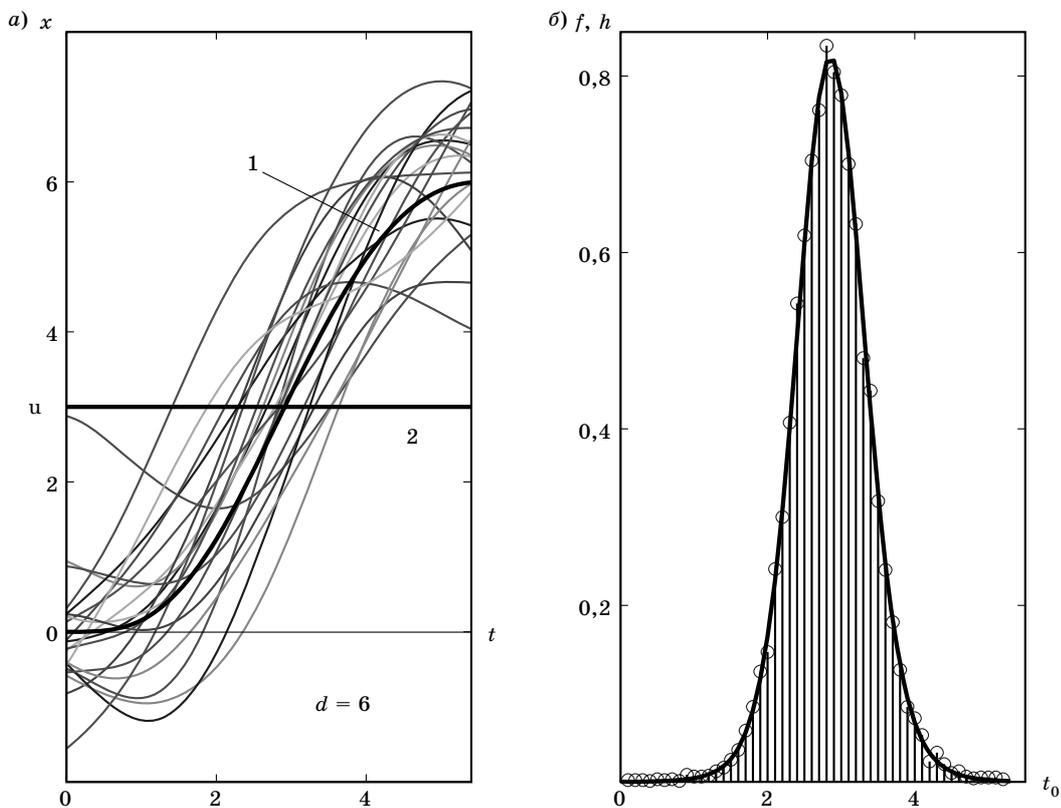
Вычисления выполнялись в SIGNAL PROCESSING. Моделирование проводилось по методике примера 4. Плотность (11) вычислялась как приращение функции распределения  $F(t_0) = 1 - \Phi(u - s(t_0))$  (оператор DIFF), поэтому ее значения сдвинуты по отношению к значениям гистограммы на величину  $\Delta$ . При этом оценка среднего времени  $\hat{t}_0 = 2,961$  оказалась близкой к сред-



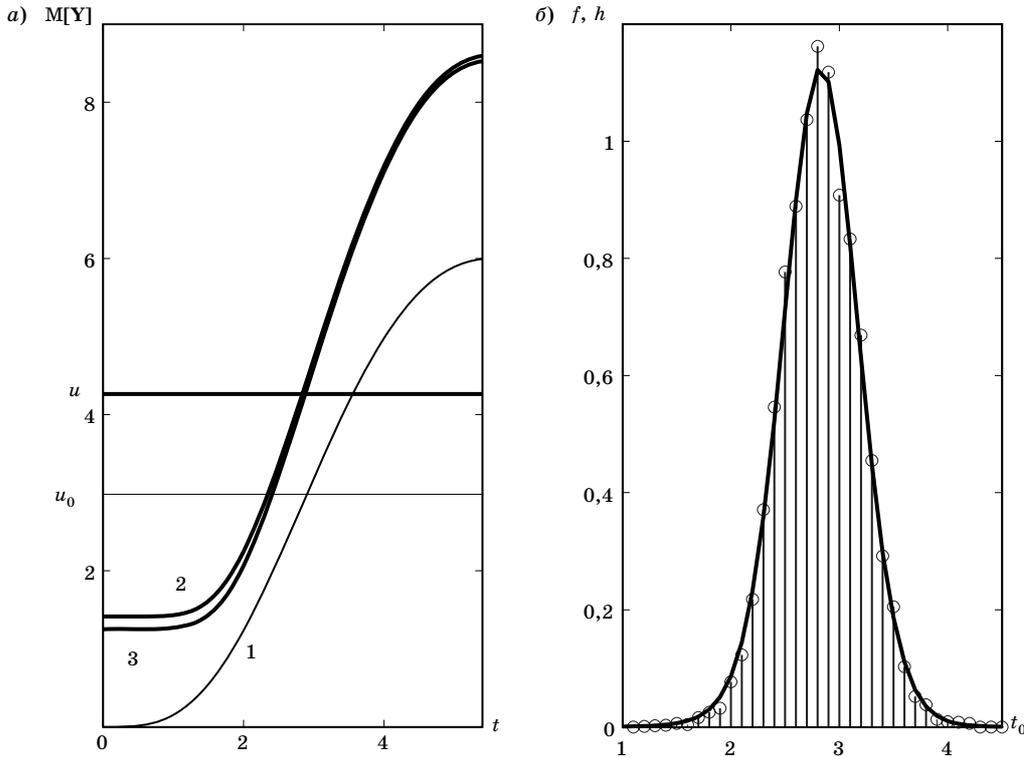
■ Рис. 9. Пример четырехкратного пересечения уровня



■ Рис. 10. Плотность распределения



■ Рис. 11. Пересечение на выходе фильтра Баттлерворта



■ Рис. 12. Плотность распределения времени прихода сигнала

нему  $\bar{t}_0 = 2,959$ . Плотность распределения симметрична (коэффициент асимметрии  $\hat{\gamma}_1 = 0,015$ ), но за счет эксцесса (коэффициент  $\hat{\gamma}_2 = 1,069$ ) распределение отличается от нормального. Оценка дисперсии времени пересечения  $\hat{\sigma}_t^2 = 0,284$  превышает оценку  $\sigma_0^2 = \sigma^2 / k^2 = 0,192$  [2], в которой  $k$  — крутизна фронта в области средней точки пересечения.

В радиотехнических системах измеряется время прихода демодулированного сигнала, описывающегося распределением Райса. Двумерное распределение Райса описывается громоздко [2], одномерное близко к нормальному. Представляет интерес возможность применения простой модели (11) и в этом случае.

Моделирование состояло в генерировании сигнала  $Y = \sqrt{X_C^2 + X_S^2}$ , независимые квадратурные составляющие которого  $X_C, X_S \in N(S, B)$ , и в фик-

сировании момента первого превышения сигналом  $Y$  уровня  $u = M[Y]_{\max} / 2$ .

Среднее значение сигнала  $M[Y] \approx \sqrt{2\sigma^2 + 2S^2}$ , вычисленное для некоррелированного шума (рис. 12, а, кривая 2), близко к полученному экспериментально (рис. 12, а, кривая 3). Фронт исходного сигнала, пересекающего уровень  $u_0$ , показан на рис. 12, а, кривая 1. Плотность распределения времени прихода (рис. 12, б) симметрична ( $\hat{\gamma}_1 = -0,055$ ) и отлична от нормальной:  $\hat{\gamma}_2 = 0,698$ . Оценка дисперсии  $\hat{\sigma}_t^2 = 0,135$ .

Приведенные примеры расчета и моделирования плотности распределения времени пересечения гауссовым процессом заданного уровня позволяют сделать вывод о том, что в задаче измерения времени прихода импульсного сигнала модель двумерного нормального распределения может оказаться достаточной для практических расчетов.

### Литература

1. Тихонов В. И., Хименко В. И. Проблема пересечений уровней случайными процессами. Радиофизические приложения // Радиотехника и электроника. 1998. Т. 43. № 5. С. 501–523.
2. Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. М.: Радио и связь, 1986. 296 с.
3. Воробьев С. Н. Пересечение гауссовым марковским процессом детерминированного уровня // Информационно-управляющие системы. 2004. № 2. С. 16–20.

4. Воробьев С. Н. Марковская модель пересечения стационарного гауссова процесса с детерминированным уровнем // Информационно-управляющие системы. 2004. № 3. С. 12–16.
5. Дьяконов В., Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB. СПб.: Питер, 2001. 480 с.
6. Воробьев С. Н. Эффективное обнаружение детерминированных сигналов / ГУАП. СПб., 2003. 139 с.
7. Митяшев Б. Н. Определение временного положения импульсов при наличии помех. М.: Сов. радио, 1962. 199 с.

УДК 681.314+681.51.011

# АНАЛИТИКО-ИМИТАЦИОННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ АНАЛОГО-ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОМЕХ (Часть 1)

**Э. П. Тихонов,**

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

*На основании предложенных автором информационных алгоритмов проведен аналитико-имитационный анализ потенциальных возможностей адекватных алгоритмов аналого-цифрового преобразования поразрядного уравнивания, в том числе, при воздействии аддитивной помехи. На основе критерия помехоустойчивости разработаны рекомендации по оптимальному выбору параметров адекватных алгоритмов аналого-цифрового преобразования в зависимости от уровня аддитивной помехи.*

*On the basis of the information algorithms proposed by the author, certain methods of analog-digital transformation are investigated in the presence of noise. The results of research allow us to receive recommendations as to an optimum choice of parameters of adequate algorithms of analog-digital transformation depending on noise.*

## Счисление и информационные алгоритмы аналого-цифрового преобразования

Известно, какую роль в современной электронной аппаратуре играют аналого-цифровые преобразователи (АЦП). Все современные АЦП реализуют аппаратно тот или иной алгоритм аналого-цифрового преобразования. Аналитическая запись алгоритмов АЦП в математической форме, даже для наиболее распространенного алгоритма поразрядного уравнивания, долгое время отсутствовала в литературе. Это было связано с тем, что процесс аналого-цифрового преобразования, независимо от применяемого способа, из-за наличия операции сравнения входного сигнала с уравнивающей физической величиной представлял собой нелинейный, итерационно разворачивающийся во времени процесс, содержащий одновременно дискретное и непрерывное представление входящих в алгоритм величин. Разработка адекватной аналитической записи различных алгоритмов АЦП не только открывает новые возможности по исследованию свойств алгоритмов без дорогостоящих экспериментальных исследований их аппаратной реализации, но и позволяет

обрести дополнительные знания и сравнить между собой, например, потенциальные свойства того или иного алгоритма, которые в принципе нельзя получить экспериментально. Доступность проведения имитационного моделирования по адекватной математической записи алгоритма с учетом вносимых, в том числе случайных, искажений от неидеальной аппаратной реализации алгоритма расширяет и углубляет понимание многих процессов, происходящих в электронной аппаратуре, что способствует нахождению технологических и конструктивных путей ослабления или даже устранения их влияния на ухудшение метрологических характеристик АЦП. Это особенно важно, так как АЦП выполняет функцию измерения, и возможный уход параметров от номинальных значений по тем или иным причинам не приводит к явному отказу аппаратуры в целом, а только ухудшает ее качественные и некоторые технические показатели. Аналитико-имитационные исследования с целью априорного предсказания последствий качественного ухудшения эксплуатируемой аппаратуры позволяют также не только выбрать оптимальные величины основных параметров АЦП, а и

определить режимы тестирования в период его эксплуатации, и разработать соответствующие рекомендации по эксплуатации аппаратуры с учетом изменяющихся условий ее функционирования.

Целью работы является аналитический анализ и исследование, включая методы имитационного моделирования, динамики помехоустойчивости АЦП в зависимости от изменения его параметров и интенсивности помех с последующей разработкой рекомендаций для оптимального выбора разрядности на базе предложенных и обоснованных в работе модификаций наиболее распространенных алгоритмов аналого-цифрового преобразования поразрядного уравнивания. В основу предложенных в работе математико-информационных алгоритмов положены рассмотренные в работах [1–3] с учетом воздействия аддитивной помехи  $\xi(n\Delta t)$  на входной сигнал следующие аналитически адекватные представления алгоритмов АЦП:

$$E(n\Delta t) = E[(n-1)\Delta t] + E_n h \{x + \xi(n\Delta t) - E[(n-1)\Delta t] - E_n\} \quad (1)$$

и

$$E(n\Delta t) = E[(n-1)\Delta t] + E_n \text{sign} \{x + \xi(n\Delta t) - E[(n-1)\Delta t]\}, \quad (2)$$

где  $E(n\Delta t)$  и  $E[(n-1)\Delta t]$  — значения уравнивающей физической величины (в дальнейшем — уравнивающей величины) на  $n$  и  $n-1$ -м тактах уравнивания,  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $N$  — число двоичных разрядов;  $E_n = E_0/2^n$  — уравнивающая последовательность, имеющая ту же размерность, что и входной сигнал с помехой;  $E_0$  — заданный диапазон аналого-цифрового преобразования;  $x + \xi(n\Delta t)$  — соответственно входной сигнал и аддитивная помеха, эквивалентная по существу инструментальной помехе;  $\Delta t$  — величина временного такта уравнивания (время, в течение которого выполняется единичный акт процесса уравнивания);  $\Delta t N$  — временной интервал аналого-цифрового преобразования (интервал преобразования);  $h\{\dots\}$  и  $\text{sign}\{\dots\}$  — функции сравнения входного сигнала и помехи с уравнивавшей величиной  $E(n\Delta t)$ , при  $n = 1, 2, \dots, N$  задаются следующим образом:

$$h\{y - E[(n-1)\Delta t] - E_n\} = \begin{cases} 1 & \text{при } y \geq E[(n-1)\Delta t] + E_n; \\ 0 & \text{при } y \leq E[(n-1)\Delta t] + E_n; \end{cases}$$

$$\text{sign}\{y - E[(n-1)\Delta t]\} = \begin{cases} 1 & \text{при } y \geq E[(n-1)\Delta t]; \\ -1 & \text{при } y \leq E[(n-1)\Delta t], \end{cases}$$

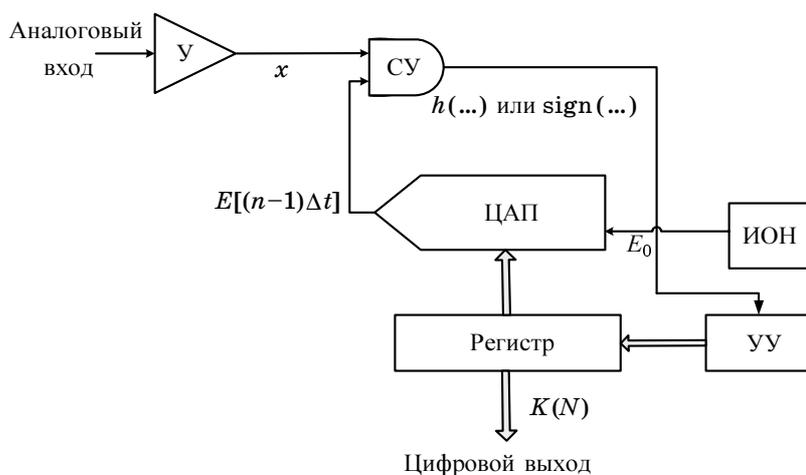
где  $y = x + \xi(n\Delta t)$ ,  $0 \leq x \leq E_0$  (в дальнейшем положим временной шаг  $\Delta t = 1$ ).

Первую функцию сравнения в математике называют индикаторной функцией [4], а вторую —

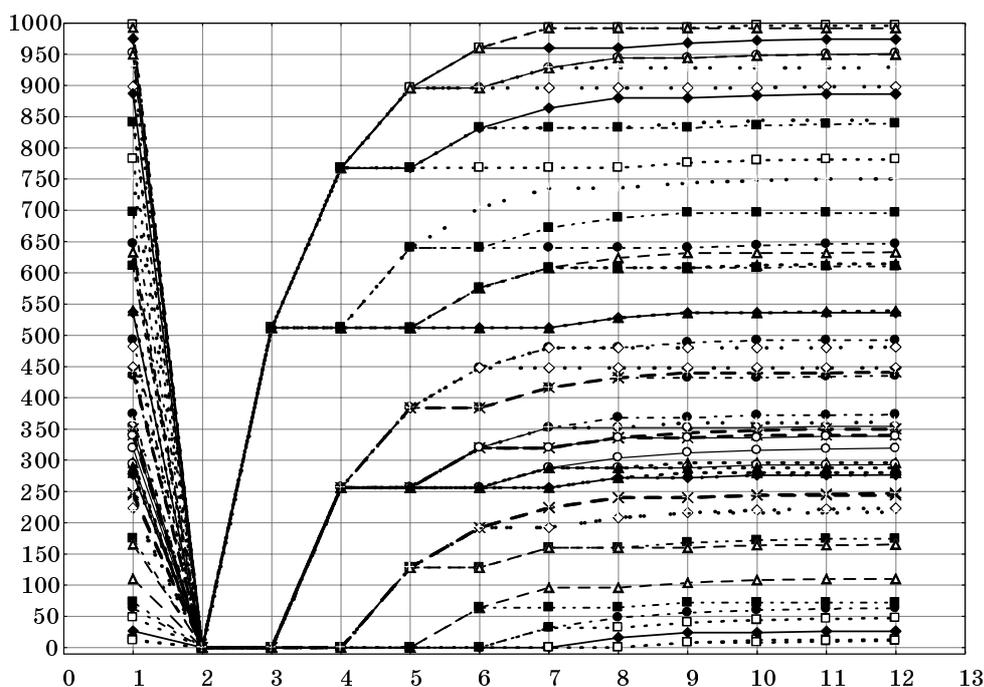
знаковой. В соответствии с этими терминами алгоритмы (1) и (2) в дальнейшем будем сокращенно называть индикаторным и знаковым алгоритмами. Как следует из формул (1) и (2), каждое последующее значение уравнивающей величины зависит от его предыдущего значения. Таким образом, суть алгоритма сводится к последовательным во времени сравнениям входного сигнала с априорно известной, изменяющейся по определенному закону в зависимости от результатов сравнения, уравнивающей величиной. При этом точность аналого-цифрового преобразования зависит от точности установления уравнивающей величины и числа двоичных разрядов, равного числу шагов (тактов) изменения уравнивающей величины и сравнения ее с входным сигналом. Обычно начальное значение уравнивающей величины устанавливается равным нулю, т. е.  $E(0) = 0$ . Однако для алгоритма (2) допускается установка начального значения  $E(0) = 0,5 E_0$ , если нежелательно, чтобы уравнивающая величина принимала отрицательные значения при  $0 \leq x \leq E_0$ .

Особенностью рассматриваемого представления адекватных алгоритмов является то, что они математически описывают динамику уравнивающей величины, т. е. сигнала на выходе цифроаналогового преобразователя (ЦАП) (рис. 1), встроенного в цепи обратной связи АЦП. Описание алгоритмов в виде нелинейного итерационного уравнения или отображения — термина, принятого в математике [5], позволяет, например, наглядно представить графически в различных вариантах динамику уравнивающей величины, которую невозможно представить при операторной форме описания процесса аналого-цифрового преобразования, предложенного в работе [6]. При этом наиболее полное графическое представление в динамике уравнивающей величины будет при условии, что моделью входного сигнала является постоянная величина, изменяющаяся от преобразования к преобразованию по равномерному закону распределения вероятности в пределах заданного диапазона  $E_0$  (рис. 2–4).

Примеры подобных графиков (см. рис. 2, 3) как по форме, так и по сути соответствуют так называемому древовидному фракталу [7], корнями этих «кустов» и «деревьев» являются значения входных сигналов (позиции 1 и 2 на оси абсцисс для рис. 2 и 3 соответственно; конечному результату преобразования для заданного числа двоичных разрядов  $N = 10$  соответствует позиция 12, которая образует «вершину куста» и «вершину дерева», соответствующие их «корням»). Отличие алгоритмов (1) и (2) наглядно иллюстрируется изменением вида симметрии древовидных фрактальных структур (см. рис. 2, 3). На трехмерном графике (рис. 4) изображена динамика изменения погрешности преобразования для случайно изменяющегося входного сигнала индикаторным алгоритмом. График наглядно демонстрирует дина-



■ Рис. 1. Структурная схема аналого-цифрового преобразования: У — входной согласующий усилитель; СУ — сравнивающее устройство; ИОН — источник образцового напряжения (источник уравнивающей физической величины); УУ — устройство управления



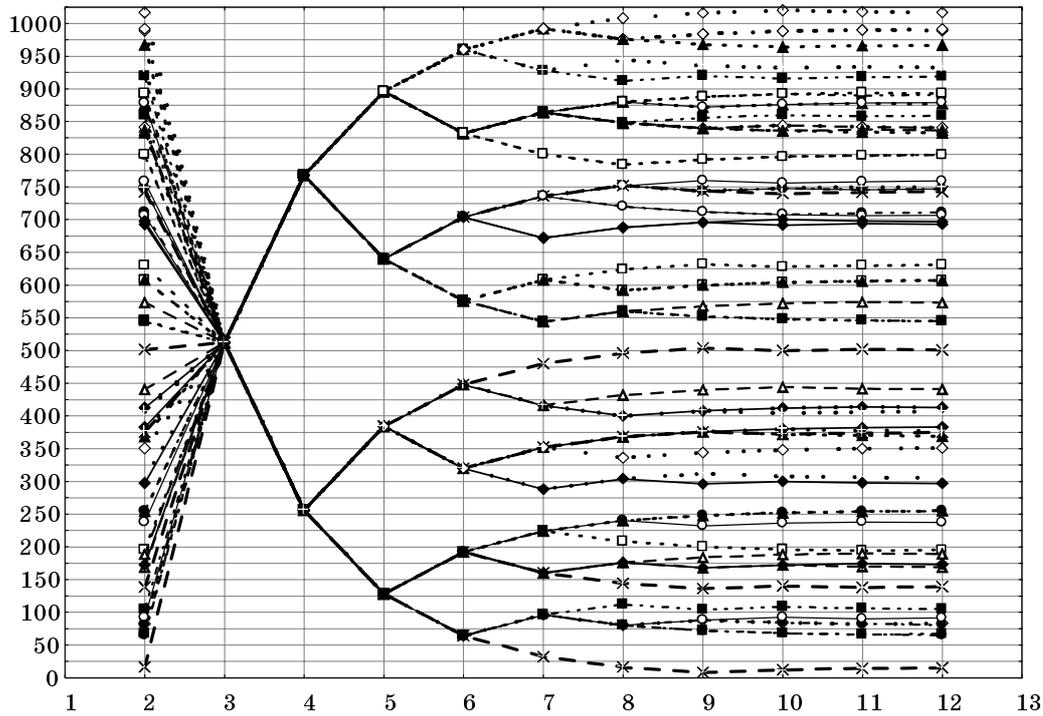
■ Рис. 2. График, характеризующий работу индикаторного алгоритма в виде древовидной структуры («куста»), образующего соответствующий фрактал

мику погрешности процесса уравнивания индикаторным алгоритмом выборки, состоящей из пяти случайно изменяющихся от измерения к измерению амплитуд входного сигнала с равномерным законом распределения вероятностей.

Прежде чем перейти к формированию и рассмотрению других эквивалентных форм записи алгоритмов АЦП, необходимо затронуть вопрос, связанный со счислением или нумерацией как совокупностью приемов представления натуральных чисел [7–9]. Очевидно, что квантованный по уровню сигнал может принимать только конечное мно-

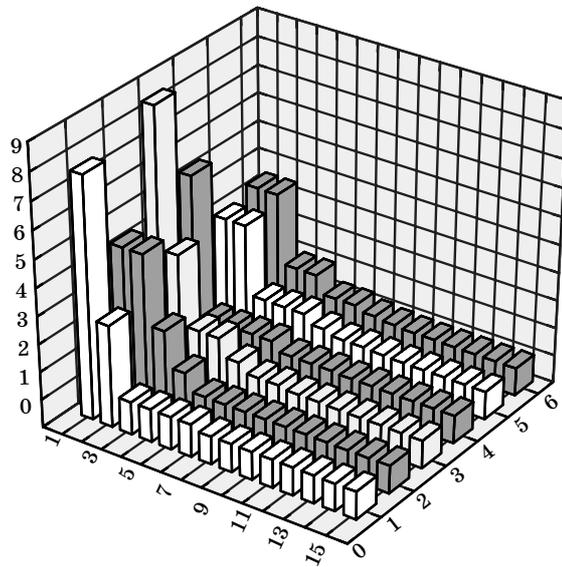
жество значений. Поэтому выходной сигнал АЦП в пределах каждого временного интервала преобразования  $\Delta t N$  ( $\Delta t \neq 1$ ) представляется числом, сформированным физически в виде совокупности электрических сигналов, образующих код в принятой системе счисления, соответствующий порядковому номеру квантов, укладываемых в установленном на входе АЦП уровне сигнала.

Принцип записи чисел в позиционной системе счисления, обладающей аддитивно-мультипликативными свойствами, определяется теоремой из элементарной теории чисел, согласно которой, для



■ Рис. 3. График, описывающий работу знакового алгоритма в виде древовидной структуры, образующего соответствующий фрактал

$\text{Data}(i+1,j):=\text{Data}(i,j)+(0.5*D/(2^{(i+1)}))*(1+\text{Sign}(x-\text{Data}(i,j)-E/(2^{(i+1)})))$   
 $E:=10$ ; Объем выборки;  $N:=2000$ ; число разрядов-16;  $x \rightarrow \text{Rnd}(10)$ ;



■ Рис. 4. Изменения погрешности уравнивания в зависимости от изменения числа разрядов АЦП и амплитуды входного сигнала

любого натурального числа  $A$  можно найти одно и только одно натуральное число при заданном натуральном основании  $q$  [9]. Следовательно, для этого числа  $A$  выполняется уравнение

$$A = \sum_{i=1}^N a_i q^{-i}, \quad (3)$$

которое имеет решение в целых числах  $a_i (i = 1, \dots, N)$  таких, что  $0 \leq a_i \leq q$ . Приведенному уравнению

(3) удовлетворяет решение только с одним упорядоченным набором  $\langle a_1, \dots, a_N \rangle$  целых чисел, который и должен образовать на выходе АЦП соответствующий цифровой код или кодовое слово (рис. 5). Поскольку в основном все современные вычислительные машины работают в двоичной позиционной системе счисления, для которых  $q = 2$ , то  $a_i = 1 \cup 0$  (где символ  $\cup$  соответствует логической операции «ИЛИ»), поэтому кортеж  $\langle a_1, \dots, a_N \rangle$  определяет  $N$ -разрядный двоичный код, причем уравнение (3) выполняется для любого  $0 \leq A \leq 1$  при  $N$ , стремящемся к бесконечности. Если же для  $A$  выполняется условие  $0 \leq A \leq E_0$ , то при конечном  $N$

$$A = E_0 \sum_{i=1}^N a_i 2^{-i} = \Delta q \sum_{i=1}^N a_i 2^{N-i},$$

так как  $E_0 = \Delta q 2^N$ , где  $\Delta q$  — величина кванта. Кодовые слова можно передавать в параллельной или последовательной формах. Для передачи в параллельной форме надо использовать  $N$  линий в канале связи.

Представление числа  $A$  в символьной форме при использовании алгоритма со знаковой функцией сравнения, т. е. при использовании кортежа вида  $\langle b_1, \dots, b_N \rangle$ , будет несколько иным. Для этого представления числа  $A$  воспользуемся равенством  $a_i = 0,5(1 + b_i)$ , которое подставим в формулу для двоичного изображения числа  $A$ . В результате получим

$$A = 0,5E_0 \sum_{i=1}^N (1 + b_i) 2^{-i} = 0,5\Delta q \sum_{i=1}^N (1 + b_i) 2^{N-i},$$

где  $b_i = 1 \cup (-1)$ .

Все рассмотренные выше алгоритмы аналого-цифрового преобразования направлены на поиск

такого набора  $\langle a_1, \dots, a_N \rangle$  или  $\langle b_1, \dots, b_N \rangle$  при фиксированном основании позиционной системы счисления  $q = 2$ , для которого при конечном  $N$  осуществляется с точностью до кванта минимизация равномерного критерия вида

$$K(a_1, \dots, a_N) = \left| \Delta q \sum_{i=1}^N a_i 2^{N-i} - X \right| \quad (4)$$

или

$$K(b_1, \dots, b_N) = \left| 0,5\Delta q \sum_{i=1}^N (1 + b_i) 2^{N-i} - X \right|, \quad (5)$$

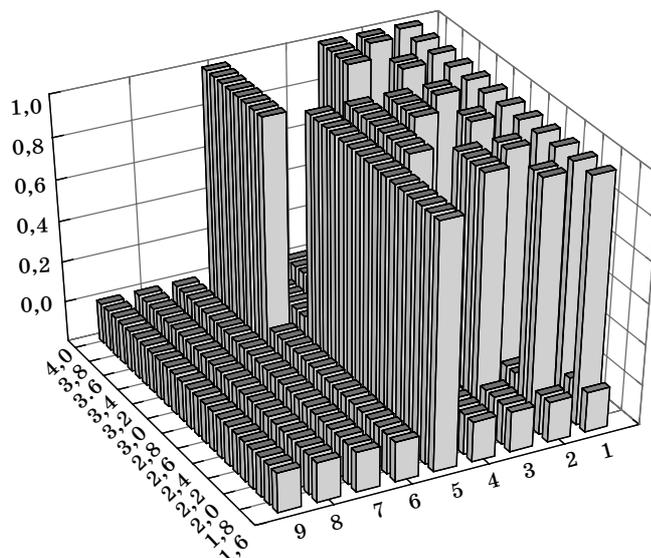
где множество значений чисел  $X$ , соответствующих входному сигналу АЦП, совпадает с подмножеством  $M$  значений чисел  $A$ , представленных в двоичном коде, только в конечном числе точек на отрезке  $[0, E_0]$ . Это множество  $M$  образуется при делении числа  $X$  на квант  $\Delta q = E_0 / 2^N$  без остатка. Для остальных чисел  $X$  возникает погрешность усечения в пределах кванта  $\Delta q$ , т. е.  $0 \leq \gamma_q \leq \Delta q$ . Действительно, при конечном числе разрядов  $N$  минимизация (4) и (5) может быть выполнена алгоритмически только приближенно с погрешностью усечения  $\gamma_q \equiv \gamma$ , кроме случая, когда множество  $X$  совпадает с подмножеством  $M$ . Минимум критериев (4) и (5) достигается в нулевой точке, т. е. при выполнении равенства

$$X = \Delta q \sum_{i=1}^N a_i 2^{N-i} \quad (6)$$

и

$$\Delta q \sum_{i=1}^N (1 + b_i) 2^{N-i} = 2X \quad (7)$$

Data(1,j):=16+j; j=1,2,...,23.



■ Рис. 5. Изменение кода при преобразовании линейно изменяющегося входного сигнала от 16 до 39 индикаторным 9-разрядным алгоритмом

для фиксированных  $N$  и  $\Delta q$  относительно  $a_i$  и  $b_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

Специфика алгоритмов аналого-цифрового преобразования входного аналогового сигнала, значение которого соответствует искомому числу  $X$ , в цифровой двоичный код заключается в том, что алгоритмическое решение уравнений (6) и (7), следовательно, поиск кортежей  $\langle a_1, \dots, a_N \rangle$  или  $\langle b_1, \dots, b_N \rangle$  осуществляется итерационно методом деления отрезка  $[0, E_0]$  пополам. При этом предполагается, что искомое число  $X$  находится в пределах отрезка  $[0, E_0]$ , а число коэффициентов в кортежах  $\langle a_1, \dots, a_N \rangle$  или  $\langle b_1, \dots, b_N \rangle$  при фиксированном основании позиционной двоичной системы ( $q = 2$ ) соответствует числу операций последовательного деления отрезка  $[0, E_0]$  пополам с точностью до кванта  $\Delta q$ . Если выбрать другое основание  $q$ , то число деления исходного отрезка, естественно, изменится [10], а это приводит к изменению алгоритма поиска минимума критериев (4) и (5). Физически каждый символ набора обычно адекватно представляется с помощью уровня одного или нескольких дискретных электрических сигналов — импульсов. Поэтому процесс преобразования аналогового сигнала в последовательность кодовых слов часто называют импульсно-кодовой модуляцией. Представление слов электрическими сигналами определяется форматом кода.

Множество существующих алгоритмов аналого-цифрового преобразования связано с особенностями методов поиска искомой точки с координатой, равной числу  $X$ , принадлежащему некоторому заданному отрезку. При этом немаловажную роль играет операция получения информации посредством функции сравнения о принадлежности искомой точки  $X$  в процессе ее поиска соответствующему подынтервалу отрезка  $[0, E_0]$ . Учет в математических моделях вида реальной функции сравнения, близкой по форме к так называемой сигмоидной функции [11], и способа обработки результатов сравнения приводит к новым алгоритмам, близким по своей структуре к алгоритмам, лежащим в основе нейронных сетей [11]. В этом случае при решении уравнений (6) и (7) поиск искомых наборов  $\langle a_1, \dots, a_N \rangle$  или  $\langle b_1, \dots, b_N \rangle$  может осуществляться не только последовательным делением исходного отрезка пополам, а и в других пропорциях, например, в пропорциях, соответствующих золотому сечению [10, 12]. При этом общий вид алгоритмов (1) и (2) сохраняется, а меняется только вид последовательности  $E_n$ .

Многообразие алгоритмов последовательного действия, объединенных единой методикой построения, обусловлено разнообразием выбора типа уравнивающей последовательности  $E_n$  и вида функции сравнения, а также возможностью дополнительной обработки входного сигнала и результатов сравнения входного сигнала с уравнивающей физической величиной. В первом слу-

чае, например, алгоритмы (1) и (2) при выборе уравнивающей последовательности, равной постоянной величине в виде  $E_n = \Delta q = E_0 / 2^N$  ( $N$  — число двоичных разрядов), преобразуются в алгоритмы с постоянным квантом (шагом) уравнивания. При этом алгоритм (2) соответствует так называемому алгоритму развертывающего уравнивания или алгоритму счета, а алгоритм (1) — алгоритму следящего уравнивания [13, 14].

Возможны варианты алгоритмов АЦП, в которых благодаря введению дополнительной обработки результатов сравнения повышается надежность и достоверность функции сравнения входного сигнала с уравнивающей физической величиной. При этом алгоритмы (1) и (2) аналитически могут описываться в виде

$$E(n+1) = E(n) + E_n H \{ h [y - E(n) - a_n] \};$$

$$E(n+1) = E(n) + E_n H \{ \text{sign} [y - E(n)] \},$$

где  $H \{ \dots \}$  — некоторый оператор преобразования результатов сравнения сигнала  $y$  с уравнивающей физической величиной.

Дополнительной обработке может подвергаться входной сигнал. В этом случае алгоритмы аналитически представимы в виде

$$E(n+1) = E(n) + E_n \{ h [G(y) - E(n) - a_n] \};$$

$$E(n+1) = E(n) + E_n \{ \text{sign} [G(y) - E(n)] \}.$$

Оператор  $G(y)$  в этом случае может описывать, например, действие устройства выборки и хранения, которое может применяться для фиксации амплитудного значения входного сигнала при преобразовании изменяющегося во времени сигнала  $y(t)$ .

Очевидно, что могут иметь место и комбинированные алгоритмы вида

$$E(n+1) = E(n) + E_n H \{ h [G(y) - E(n) - a_n] \};$$

$$E(n+1) = E(n) + E_n H \{ \text{sign} [G(y) - E(n)] \},$$

в которых одновременно применяются операторы  $H \{ \dots \}$  и  $G(y)$ .

Исходному значению уравнивающей величины  $E = 0$  для рассматриваемых алгоритмов соответствует начальное значение кортежа  $\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$ . Не останавливаясь на технических особенностях реализации алгоритмов, отметим только, что алгоритм (1) реализуется проще за счет использования активных электронных компонентов с однополярной проводимостью. Значения функций сравнения для временных тактов с индексом  $i = 1, 2, \dots, N$  тождественны искомому значению коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  в установленной двоичной системе счисления, т. е.  $a_i = h \{ y - E[(i-1)] \} + a$  и  $b_i = \text{sign} \{ y - E[(i-1)] \}$ , и приводят, согласно алгоритмам, к изменению начального значения кортежа  $\langle a_1, \dots, a_N \rangle$  или  $\langle b_1, \dots, b_N \rangle$  на каждом такте

итерации. Иллюстрация динамики трансформации начального значения кортежа  $\langle a_1, \dots, a_N \rangle$  на каждом такте итерации, полученная посредством имитационного моделирования, на примере преобразования линейно изменяющегося входного сигнала, эквивалентного изменениям порядкового номера квантов от 16 до 39, приведена на рис. 5.

Для дальнейшего анализа целесообразно перейти к модифицированной форме записи алгоритмов (1) и (2). Для этого разделим их правые и левые части на величину кванта  $\Delta q$ . Учтя, что значение функции сравнения не меняется, если будут сравниваться величины, поделенные на одно и то же положительное число, например, на величину кванта  $\Delta q$ , то в результате получим следующие эквивалентные отображения исходных алгоритмов:

$$K(n) = K[(n-1)] + 2^{N-n} h [K_{в.с} + \gamma(N) - K(n-1) - 2^{N-n} + \xi_n]; \quad (8)$$

$$K(n) = K[(n-1)] + 2^{N-n} \text{sign} \{K_{в.с} + \gamma(N) - K(n-1) + \xi_n\}, \quad (9)$$

где  $K(n) = E(n)/\Delta q$ ,  $K(n-1) = E(n-1)/\Delta q$  и  $K_{в.с} = [x/\Delta q]$  — целая часть результата деления входного сигнала на квант;  $\Delta q = 2^{-N} E_0$  — величина кванта при заданном числе двоичных разрядов  $N$ ;  $\gamma(N)$  — величина приведенной (нормированной) к кванту погрешности усечения, соответствующая дробной части деления  $x$  на  $\Delta q$ , т. е.  $x = (K_{в.с} + \gamma)\Delta q$  или  $x_n = x/\Delta q = K_{в.с} + \gamma(N)$  и  $\xi_n = \xi/\Delta q$  — нормированные к кванту сигнал и помеха. В дальнейшем, если речь идет о нормированной к кванту погрешности усечения при заданном числе двоичных разрядов  $N$ , то  $\gamma(N) = \gamma$  — погрешность усечения при  $n = N$  (определение «нормированная к кванту» или «приведенная» может опускаться, если из контекста ясно, о какой именно погрешности идет речь).

При выводе алгоритмов (8) и (9) принимались во внимание тождественные преобразования  $\text{sign}[x + \xi(n) - E(n-1)] \equiv \text{sign}[\Delta q (K_{в.с} + \gamma - K(n-1) + \xi/\Delta q)] \equiv \text{sign}[K_{в.с} + \gamma - K(n-1) + \xi_n]$  и  $h[x + \xi(n) - E(n-1) - 2^{N-n} + \gamma] = h[K_{в.с} + \gamma - K(n-1) - 2^{N-n} + \xi_n]$ , так как  $\Delta q > 0$ . Представление входного сигнала в виде  $x = (K_{в.с} + \gamma) 2^{-N} E_0$  приводит к тому, что первое слагаемое данного равенства «привязывает» значение входного сигнала к конкретному дискретному значению градуировочной характеристики АЦП, совпадение которых с соответствующими значениями входного сигнала как раз и дает в идеальном случае точный результат преобразования. Второе слагаемое определяет погрешность усечения или квантования, возникающую из-за конечного числа разрядов АЦП и, следовательно, обусловленную дискретностью его градуировочной характеристики.

Подставляя значения  $K(n)$ ,  $K(n-1)$  и  $K_{в.с}$  в соответствии с формулами (6) и (7), получим следующие отображения для алгоритмов (8) и (9):

$$\sum_{i=1}^n a_i 2^{N-i} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i 2^{N-i} + 2^{N-n} h \left( \sum_{i=1}^N a_{xi} 2^{N-i} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i 2^{N-i} - 2^{N-n} + \gamma + \xi_n \right) \quad (10)$$

и

$$\sum_{i=1}^n (1+b_i) 2^{N-i} = \sum_{i=1}^{n-1} (1+b_i) 2^{N-i} + 2^{N-n} \text{sign} \times \left( 0,5 \sum_{i=1}^N (1+b_{xi}) 2^{N-i} - 0,5 \sum_{i=1}^{n-1} (1+b_i) 2^{N-i} + \gamma + \xi_n \right), \quad (11)$$

где индекс  $x$  при коэффициентах  $a_i$  и  $b_i$  обозначает их принадлежность к входному сигналу.

Заметим, что если погрешность усечения  $\gamma$  изменяется в пределах  $0 \leq \gamma \leq 1$ , то для  $\xi_n$  может выполняться условие  $0 \leq |\xi_n| \leq \xi_0$ , где  $\text{const} \geq \xi_0 \geq 1$ , т. е. аддитивная помеха может быть больше кванта  $\Delta q$ . Если же положить в алгоритмах (10) и (11)  $\xi_n = 0$ , то получим так называемые идеально-информационные алгоритмы аналого-цифрового преобразования с величиной кванта, равной единице. В случае, если  $\xi_n \neq 0$ , то будем говорить о реально-информационном алгоритме. Для того чтобы разобраться в сущности подобных алгоритмов, целесообразно рассмотреть следующий подход. Как было показано выше, анализируемые алгоритмы описывают функционирование АЦП, структура которого имеет дискретные состояния, упорядоченные в соответствии с выбранной системой счисления, и открыта для взаимодействия с внешней средой, информация о которой в виде физического сигнала поступает на ее вход, образуя входной сигнал. Этот сигнал не обладает конкретной математической структурой. Однако его можно структурировать, используя любую упорядоченную структуру. Выбором типа алгоритма аналого-цифрового преобразования практически осуществляется при реализации структуризация соответствующего ему типа АЦП и тем самым, опосредованно, структуризация входного сигнала. Причем взаимодействие между входным сигналом и структурой АЦП до полного установления их соответствия между собой в установленном смысле осуществляется посредством сравнивающего устройства. В дальнейшем, если понятно из контекста, о каком алгоритме идет речь, т. е. об обычном адекватном, или идеально-информационном, или реально-информационном, будем просто говорить о знаковом или индикаторном алгоритме. Итерационные алгоритмы или отображения (10) и (11) позволяют установить соответствие между уровнем входного сигнала и последующим состоянием АЦП, эквивалентным, при математическом описании, априори неизвестному коэффициенту  $a_n$  по результату сравнения для всех  $n = 1, \dots, N$  входно-

го сигнала с предыдущим известным состоянием. Доказательство этого утверждения следует из (10) и (11) при условии, что входной сигнал теоретически априори можно структурировать любым способом, но для рассматриваемого случая его целесообразно структурировать в соответствии с установленной структурой АЦП. Действительно, преобразуем, к примеру, алгоритм (10) к следующей эквивалентной форме:

$$\sum_{i=1}^n a_i 2^{N-i} - a_i 2^{N-i} \sum_{i=1}^{n-1} = 2^{N-n} h \left( \sum_{i=1}^N a_{xi} 2^{N-i} - \sum_{i=1}^{n-1} a_i 2^{N-i} - 2^{N-n} + \gamma \right)$$

или

$$a_n 2^{N-n} = \begin{cases} 2^{N-n}, & \text{если } \sum_{i=1}^{n-1} (a_{xi} - a_i) 2^{N-i} + \sum_{i=n}^N a_{xi} 2^{N-i} - 2^{N-n} + \gamma \geq 0; \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^{n-1} (a_{xi} - a_i) 2^{N-i} + \sum_{i=n}^N a_{xi} 2^{N-i} - 2^{N-n} + \gamma < 0, \end{cases} \quad (12)$$

где  $\langle a_1, a_2, \dots, a_N \rangle = \langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$  — начальное значение набора.

В результате из (12) получаем

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^{n-1} (a_{xi} - a_i) 2^{N-i} + \sum_{i=n}^N a_{xi} 2^{N-i} - 2^{N-n} + \gamma \geq 0; \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^{n-1} (a_{xi} - a_i) 2^{N-i} + \sum_{i=n}^N a_{xi} 2^{N-i} - 2^{N-n} + \gamma < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Положим  $n = 1$ , тогда в соответствии с (13)

$$a_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=1}^N a_{xi} 2^{N-i} - 2^{N-1} + \gamma \geq 0; \\ 0, & \text{если } \sum_{i=1}^N a_{xi} 2^{N-i} - 2^{N-1} + \gamma < 0. \end{cases}$$

При  $a_{x1} = 1$  минимальное по остальным всевозможным значениям набора  $\langle a_2, \dots, a_N \rangle$ , нормированное к кванту  $\Delta q$  значение входного сигнала (код  $\langle 1, 0, \dots, 0 \rangle$ ) равно  $2^{N-1}$ , а при  $a_{x1} = 0$  максимальное по всевозможным значениям набора  $\langle a_2, \dots, a_N \rangle$ , нормированное к кванту  $\Delta q$  значение входного сигнала (код  $\langle 0, 1, \dots, 1 \rangle$ ) равно  $\sum_{i=2}^N 2^{N-i} = (2^{N-1} - 1)$ . В первом случае минимальный набор соответствует равенствам  $a_1 = 1$  и  $a_i = 0$  для  $i = 2, 3, \dots, N$ , а во втором случае максимальный набор соответствует равенству  $a_1 = 0$  и  $a_i = 1$  для

$i = 2, 3, \dots, N$ . Поэтому с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, с учетом неравенства  $1 \geq \gamma \geq 0$  получаем

$$a_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{x1} = 1 \text{ при любом наборе } \langle a_2, \dots, a_N \rangle, \\ & \text{так как } \gamma \geq 0; \\ 0, & \text{если } a_{x1} = 0 \text{ при любом наборе } \langle a_2, \dots, a_N \rangle, \\ & \text{так как } \gamma < 1. \end{cases}$$

Если  $n = 2$ , поскольку  $a_1 = a_{x1}$ , то

$$a_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum_{i=2}^N a_{xi} 2^{N-i} - 2^{N-2} + \gamma \geq 0; \\ 0, & \text{если } \sum_{i=2}^N a_{xi} 2^{N-i} - 2^{N-2} + \gamma < 0, \end{cases}$$

и с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, получаем

$$a_2 = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{x2} = 1 \text{ при любом наборе } \langle a_3, \dots, a_N \rangle, \\ & \text{так как для минимального значения } \gamma \geq 0; \\ 0, & \text{если } a_{x2} = 0 \text{ при любом наборе } \langle a_3, \dots, a_N \rangle, \\ & \text{так как для максимального значения } \gamma < 1. \end{cases}$$

Пусть теперь  $n = k$ ; поскольку  $a_1 = a_{x1}, \dots, a_{k-1} = a_{xk-1}$ , то при  $a_{xk} = 1$  минимальное, нормированное к кванту  $\Delta q$  значение входного сигнала равно  $2^{N-k}$ , а при  $a_{xk} = 0$  максимальное, нормированное к кванту  $\Delta q$  значение входного сигнала равно  $\sum_{i=k+1}^N 2^{N-i} = (2^{N-k} - 1)$ . Поэтому при  $1 \geq \gamma \geq 0$  с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, получаем для  $k = 1, 2, \dots, N$

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{если } a_{xk} = 1 \text{ при любом наборе } \langle a_{k+1}, \dots, a_N \rangle, \\ & \text{так как } \gamma \geq 0; \\ 0, & \text{если } a_{xk} = 0 \text{ при любом наборе } \langle a_{k+1}, \dots, a_N \rangle, \\ & \text{так как } \sum_{i=k+1}^N 2^{N-i} = 2^{N-k} - 1 - 2^{N-k} \text{ и } \gamma - 1 < 0. \end{cases}$$

Решением полученного итерационного уравнения доказывается, что для любого набора  $\langle a_{x1}, a_{x2}, \dots, a_{xN} \rangle$ , определяющего соответствующую структуру входного сигнала в соответствии с выбранной системой счисления, и временного интервала  $\Delta t$  при  $n \rightarrow N$  устанавливается взаимнооднозначное соответствие между структурой АЦП и структурой входного сигнала, или  $K(N\Delta t) = K_{в.с.}(N\Delta t)$ . Выполняя аналогичные действия, можно также доказать сходимость в указанном смысле и для знакового идеально-информационного алгоритма. Таким образом, посредством идеально-информационного алгоритма устанавливается однозначная связь между априорно выбранной структурой АЦП

и входного сигнала независимо от величины кванта  $\Delta q$ . При этом величина  $\Delta q$  определяет точность представления входного сигнала выбранной структурой АЦП и, тем самым, установленной системой числения.

Отметим, что, применяя последовательно описанные алгоритмы к кванту, определяющему так называемую погрешность усечения, можно построить множество разновидностей исходного алгоритма, порождающего соответствующие фрактальные древовидные структуры. Именно такой подход применяется к построению некоторых известных алгоритмов аналого-цифрового преобразования, например параллельно-последовательных [15], не рассмотренных в данной статье, алгоритмов.

Аналогичный результат анализа можно получить, если перейти к рассмотрению следующей модификации индикаторного идеально-информационного алгоритма:

$$K^*(n) = K^*(n-1) + h \left[ K_{\text{в.с}}^*(n) - K^*(n-1) - 1 + \gamma(n) \right], \quad (14)$$

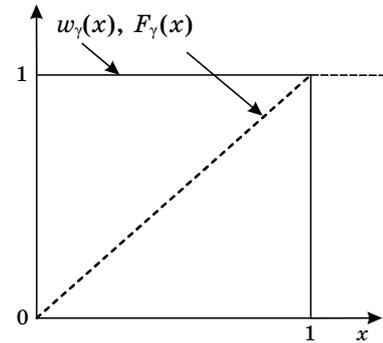
где  $K^*(n) = K(n)/(2^{N-n})$ ;  $K^*(n-1) = K(n-1)/(2^{N-n-1})$ ;  $K_{\text{в.с}}^*(n) = K_{\text{в.с}}(n)/(2^{N-n})$  — целая часть результата деления входного сигнала на величину  $2^{N-n}$ , где переменная  $n$  соответствует  $n$ -му такту итерации;  $\gamma(n) = \gamma 2^{-N+n}$  — величина погрешности усечения на  $n$ -м такте итерации, соответствующая дробной части деления входного сигнала  $x$  на величину кванта для  $n$ -го акта итерации  $\Delta q 2^{N-n}$ ;  $x = (K_{\text{в.с}}^*(n) + \gamma(n)) (\Delta q 2^{N-n})$  — для любого значения  $\Delta t$ ;  $x_{\text{н}}(n) = x / (\Delta q 2^{N-n}) = K_{\text{в.с}}^*(n) + \gamma(n)$  и  $\xi_{\text{н}}(n) = \xi / (\Delta q 2^{N-n})$  — нормированные к кванту, соответствующему  $n$ -му такту итерации, сигнал и помеха.

Вид плотности распределения вероятности  $w(\gamma(n))$  погрешности усечения для первых тактов преобразования зависит от плотности распределения вероятностей входного сигнала. По мере увеличения номера такта преобразования вид плотности распределения вероятности погрешности усечения уже для  $n = 3, 4$  трансформируется в равномерную плотность распределения. Если же входной сигнал имеет равномерный закон распределения вероятностей, то при всех тактах  $n$  преобразования плотность распределения вероятности погрешности распределения остается равномерной и имеет вид

$$w[\gamma(n)] = \frac{2^n \gamma}{2^N}.$$

Так как случайная величина  $\gamma$  или  $\gamma_q$ , по определению, принимает значения на отрезке  $[0, 1]$  и имеет равномерный закон распределения вероятностей, то ее функции и плотности распределения вероятностей принимают вид графиков, приведенных на рис. 6.

Прежде чем перейти к анализу влияния аддитивной помехи на сходимость алгоритмов, рас-



■ Рис. 6. Плотность  $w_\gamma(x)$  и функция  $F_\gamma(x)$  распределения вероятностей нормированной к кванту  $\Delta q$  погрешности усечения значения входного сигнала при его преобразовании в двоичный код

смотрим усредненный индикаторный идеально-информационный алгоритм аналого-цифрового преобразования. Для этого усредним (14) по случайной величине  $\gamma(n)$  для  $n$ -го такта итерации при фиксированном значении входного сигнала. В результате получим

$$K^*(n) = K^*(n-1) + F_{\gamma(n)} \left[ K_{\text{в.с}}^*(n) - K^*(n-1) - 1 \right]$$

или

$$V^*(n) = V^*(n-1) - F_{\gamma(n)} \left[ V^*(n-1) \right], \quad (15)$$

где  $V^*(n) = K_{\text{в.с}}^*(n) - K^*(n) - 1$  и  $V^*(n-1) = K_{\text{в.с}}^*(n-1) - K^*(n-1) - 1$ ;  $F_{\gamma(n)} V^*(n-1)$  — функция распределения нормированной к кванту погрешности усечения на  $n$ -м такте итерации.

Проанализируем функцию распределения вероятностей погрешности усечения  $\gamma(n)$ , которая в соответствии с рис. 6 для рассматриваемого случая принимает только два значения и не может принимать значения меньше единицы. Это связано с тем, что абсолютная величина разности  $|V^*(n)|$ , по определению, изменятся при  $n = 1, 2, \dots, N$  в пределах  $0 \leq |V^*(n)| \leq 2^{N-n}$  в соответствии с натуральным рядом. Поэтому для функции распределения имеем

$$F_{\gamma(n)} \left[ V^*(n-1) \right] = \begin{cases} 1 & \text{для } V^*(n-1) \geq 0; \\ 0 & \text{для } V^*(n-1) < 0 \end{cases} \quad (16)$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (a_{xi} - a_i) 2^{n-i} + \sum_{i=n+1}^N a_{xi} 2^{n-i} - 1 = \\ & = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} (a_{xi} - a_i) 2^{n-i} + \sum_{i=n}^N a_{xi} 2^{n-i} - 2, & \text{если } V^*(n-1) \geq 0; \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_{xi} - a_i) 2^{n-i} + \sum_{i=n}^N a_{xi} 2^{n-i} - 1, & \text{если } V^*(n-1) < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

и после упрощения для всех  $n = 1, 2, \dots, N$  получаем

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } V^*(n-1) = \\ & = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{xi} - a_i) 2^{n-i} + \sum_{i=n}^N a_{xi} 2^{n-i} \geq 1; \\ 0, & \text{если } V^*(n-1) = \\ & = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{xi} - a_i) 2^{n-i} + \sum_{i=n}^N a_{xi} 2^{n-i} < 1. \end{cases} \quad (17)$$

Следовательно, для  $n = k$  при определении значения коэффициента  $a_k$  получаем

$$a_k = \begin{cases} 1, & \text{если } V^*(n-1) = \sum_{i=k}^N a_{xi} 2^{k-i} \geq 1; \\ 0, & \text{если } V^*(n-1) = \sum_{i=k}^N a_{xi} 2^{k-i} < 1, \end{cases}$$

откуда сразу же следует, что  $a_k = 1$ , если только  $a_{xk} = 1$ , и  $a_{xk} = 0$ , если только  $a_{xk} = 0$ .

Пусть  $k$  «пробегаёт» все значения от 1 до  $N$ , тогда для конечного  $k = N$  выполняется равенство

$$K_{в.с}(N\Delta t) - K(N\Delta t) = 0.$$

Таким образом, установлено, что для всех тактов преобразования и любого значения  $\Delta t$  справедливо равенство  $K^*(n) = K_{в.с}^*(n)$ . Поэтому погрешность преобразования для  $k = n$ , согласно опреде-

лению, соответствует погрешности усечения, которая определяется по формуле

$$\begin{aligned} \varepsilon(n) &= x - K^*(n) = [K_{в.с}^*(n) + \gamma(n) - K^*(n)] \Delta q 2^{N-n} = \\ &= \Delta q \gamma 2^{N-n}. \end{aligned}$$

Математическое ожидание погрешности усечения для  $k = n$  и ее дисперсия при равномерном распределении соответственно равны

$$M\{\varepsilon(n)\} = \int_0^1 \varepsilon(n) w(\gamma) d\gamma = \Delta q 2^{N-n} \int_0^1 \gamma d\gamma = \frac{\Delta q 2^{N-n}}{2}$$

$$\text{и } D\{\varepsilon(n)\} = \frac{\Delta q^2 2^{2(N-n)}}{12}.$$

В заключение отметим, что алгоритмический подход к изучению АЦП, или преобразователей форм информации, был предложен еще в работах А. П. Стахова (см., например, [10]), где автор предложил для описания различных методов аналого-цифрового преобразования так называемые ( $j, k, S$ -алгоритмы). Однако такое представление алгоритмов, на наш взгляд, является скорее только индикатором соответствующего алгоритма, так как не отвечает общепринятому определению алгоритма [16], и поэтому при конкретизации действий должно сопровождаться подробным словесным описанием, которое в представленной символической форме алгоритма вида ( $j, k, S$ ) просто отсутствует.

(Окончание следует)

## Литература

1. Тихонов Э. П. Аналого-цифровые преобразователи. Аналитическое описание, моделирование и сравнительные характеристики // Вестник МА СЗО. 2001. Вып. 8. С. 15–27.
2. Тихонов Э. П. Методы повышения помехоустойчивости аналого-цифрового преобразования // Развитие системных средств в электроприборостроении: Тр. ВНИИЭП. Л., 1982. С. 28–37.
3. Тихонов Э. П. Аналитическое описание алгоритмов аналого-цифрового преобразования с учетом помех // Процессорные средства электрических измерений: Сб. науч. тр. ВНИИЭП., 1984. С. 14–21.
4. Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980. 575 с.
5. Малинецкий Г. Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. 3-е изд., стер. М.: Едиториал УРСС, 2002. 256 с.
6. Цветков Э. И. Основы математической метрологии. СПб.: Политехника, 2005. 510 с.
7. Морозов А. Д. Введение в теорию фракталов / Ин-т компьютерных исследований. Москва-Ижевск, 2002. 260 с.
8. Кац М. Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел / Пер. с англ. Ю. В. Прохорова. М.: Изд-во ИЛ, 1963. 156 с.
9. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. М.: Сов. энцикл., 1984. Т. 5. 1248 с.
10. Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. М.: Сов. радио, 1977. 288 с.
11. Терехов В. А., Ефимов Д. В., Тюкин И. Ю., Антонов В. Н. Нейросетевые системы управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999. 265 с.
12. Балакшин О. Б. Коды да Винчи — новая роль в естествознании? Неожиданное в золотом сечении: Гармония асимметричных подобий в Природе. М.: КомКнига, 2005. 112 с.
13. Гитис Э. И., Пискулов Е. А. Аналого-цифровые преобразователи. М.: Энергоатомиздат, 1981. 360 с.
14. Тихонов Э. П. Исследование помехоустойчивости аналого-цифрового преобразования методами адаптивного усреднения // Электронное моделирование. 1983. № 1.
15. Тихонов Э. П. Исследование алгоритмов аналого-цифрового преобразования с последовательно-параллельной структурой // Вестник Метрологической академии, СПб. отделение. 2003. Вып. 10. С. 11–18.
16. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. М.: Сов. энцикл., 1977. Т. 1. 1152 с.

УДК 621.397.13

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ СЕГМЕНТАЦИИ ОБЪЕКТОВ

**Н. А. Обухова,**

канд. техн. наук, доцент

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

*Рассматривается алгоритм предварительной классификации изображения с целью выделения областей, содержащих с высокой вероятностью объекты интереса. Классификация областей изображения выполняется по уровню высокочастотной энергии. Приведены результаты сравнительного анализа различных способов, подчеркивающих высокочастотные составляющие изображения, и выбран способ, обеспечивающий наиболее высокий уровень качества классификации. Подробно рассмотрена процедура пороговой обработки.*

*A method of preliminary image classification is considered. The aim of the analysis is to distinguish the areas containing, with high probability, the objects of interest. Image classification is carried out according to the level of high-frequency energy. The results of the comparative analysis for various methods emphasizing the high-frequency image components are given and the method providing the highest quality of classification is chosen. A threshold processing procedure is considered in detail.*

### Введение

Реализовать автоматический захват и сопровождение нескольких объектов, разрешить ситуацию окклюзии — перекрытия объекта интереса фоном или другим объектом, сегментировать неподвижные объекты, а также исключить потерю объекта при его остановке позволяет метод сегментации по совокупности признаков [1].

Основными процедурами метода являются:

— предварительная классификация изображения с целью выделения областей, в которых с высокой вероятностью возможно присутствие объектов интереса;

— сегментация объектов по признакам временной и пространственной корреляции [2, 3];

— сопровождение объектов путем определения вероятности принадлежности фрагмента изображения объекту  $g$  на основе математического аппарата теории нечетких множеств.

Метод разработан для сегментации и сопровождения объектов размером (в пересчете к плоскости кадра) от  $4 \times 4$  до  $100 \times 100$  пикселей, обладающих жестким движением со скоростью от 0 до 20 пикселей за кадр. Жестким (non-rigid) движением называется движение, при котором все части объекта движутся в соответствии с основным направлением движения. Наиболее часто объектами с такими характеристиками являются объекты искусственного происхождения: автомобили и другие транспортные средства, летательные аппараты, морские цели.

### Общие положения

Существенной задачей при сегментации объектов по совокупности признаков является предварительная классификация изображения. Ее цель — выделение областей, в которых возможно присутствие объектов интереса. Именно эти области подвергаются дальнейшей обработке. Соответственно, предварительная классификация, не потеряв объект интереса или какую-либо его часть, должна уменьшить объем обрабатываемого далее материала. Проведение предварительного анализа на основе таких признаков как движение, форма или яркость не решает указанной выше задачи. Признак движения исключает из дальнейшего рассмотрения все неподвижные и медленно движущиеся (маневрирующие) объекты. Признак формы требует существенных априорных знаний об объектах интереса и, соответственно, неприемлем для первоначальной классификации. При работе по яркостному признаку на объект накладывается требование однородной яркости, что достаточно часто нарушается в реальных условиях видеонаблюдения для протяженных объектов интереса.

Отличительной особенностью областей изображения, включающих описанные выше объекты интереса, является большое количество перепадов яркости (детальность): на границах объект/фон, на внутренних контурах объекта и др. Для оценки этого признака введем понятие уровня детальности

$$D(k, l) = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N PL(x_k + i, y_l + j),$$

где  $PL$  — перепад яркости в пикселе;  $x_k, y_l$  — координаты левого верхнего угла фрагмента (блока) изображения;  $M, N$  — число пикселей по вертикали и горизонтали во фрагменте. Поверхности, описывающие изменения уровней детальности по плоскости кадра, показаны на рис. 1. Области, которые должны быть оставлены для дальнейшей обработки, характеризуются высоким уровнем детальности. Этот признак и положен в основу предварительной классификации.

Для ее реализации предложен следующий алгоритм:

- обработка изображения с целью усиления перепадов яркости;
- разбиение изображения на фрагменты заданного размера (блоки  $8 \times 8$ ) и определение числа перепадов яркости в каждом фрагменте;
- пороговая обработка.

Первый шаг может быть реализован большим количеством способов: методами линейного и нелинейного контрастирования, морфологической обработкой, вейвлет-преобразованием. При этом способ обработки непосредственно определяет качество предварительной классификации.

Для оценки эффективности различных способов обработки в рамках решаемой задачи был проведен их сравнительный анализ. Из каждой группы выбран метод, максимально учитывающий особенности видеоматериала: существенная часть используемых для тестирования изображений имеет фон с выраженными горизонтальными структурами (береговая линия, линия горизонта), поэтому подчеркивание перепадов яркости по вертикали заведомо приведет к включению больших фрагментов фона в области для дальнейшей сегментации. Таким образом, рассматривались следующие методы.

Линейная обработка — пространственное дифференцирование в горизонтальном направлении:

$$D(x, y) = |L(x, y) - L(x + \Delta x, y)|,$$

где  $L$  — яркость пикселя в кадре;  $(x, y)$  — координаты пикселя;  $\Delta x$  — приращение координаты  $x$  (для блока  $8 \times 8$  равна 5).

Нелинейная обработка — выделение контуров с помощью оператора Превитта [4]:

$$O_P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Морфологическая обработка — многомасштабный градиент [5]:

$$MG(L) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 [(L \oplus S_i) - (L \ominus S_i)] \ominus S_{i-1},$$

где  $L(x, y)$  — исходное изображение;  $\oplus$  и  $\ominus$  — морфологические операции наращивания и эрозии [3];  $S_i$  — квадратная группа структурных элементов. Размер  $S_i$  равен  $(2i+1)(2i+1)$  пикселей для  $0 \leq i \leq 3$ . В соответствии с этим выражением значения градиентов рассчитывают трижды с использованием структурных элементов различной размерности, а затем результаты складывают.

Вейвлет-преобразование — вейвлет Добеши Д4 [6, 7]. Для анализа используются коэффициенты вейвлет-разложения матрицы **НН**, полученные операцией свертки с коэффициентами фильтра высоких частот. Коэффициенты фильтра для вейвлет Добеши Д4

$$g_0 = -\frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; g_1 = -\frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}};$$

$$g_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; g_3 = -\frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

### Критерии эффективности

Для оценки эффективности различных способов обработки сформулированы следующие критерии.

*Степень выделения объектов интереса* — первый и наиболее важный критерий. Области изображения, исключенные на этапе предварительной классификации, далее вообще не рассматриваются, поэтому присутствие в них объекта интереса или его части — грубая ошибка. Значительно безопаснее включение в дальнейшую обработку фрагментов изображения, не содержащих объекты интереса, так как эти области будут отсегментированы в ходе дальнейшего анализа. Для оценки критерия предлагается использовать отношение площадей:

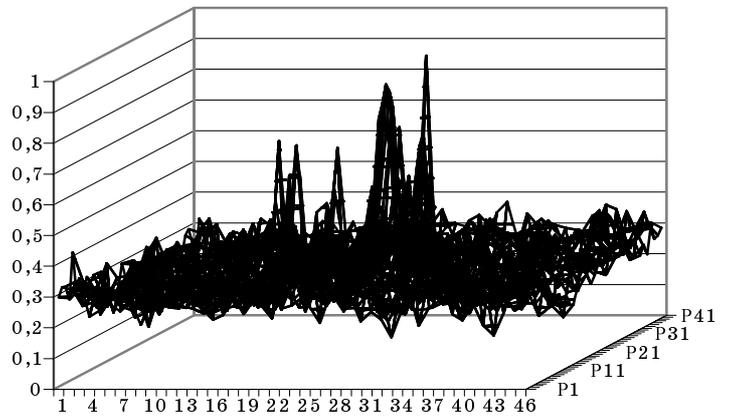
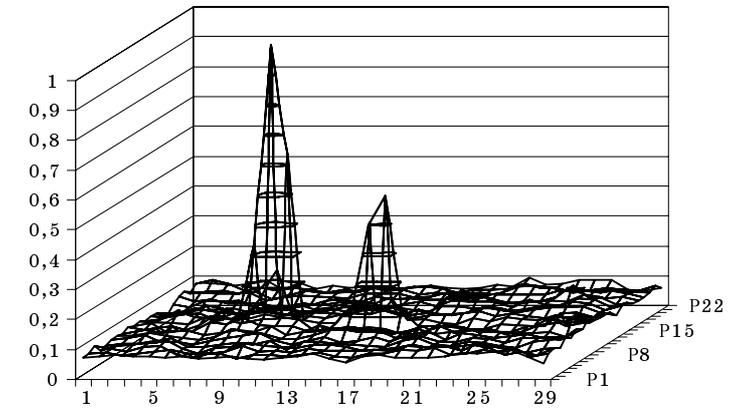
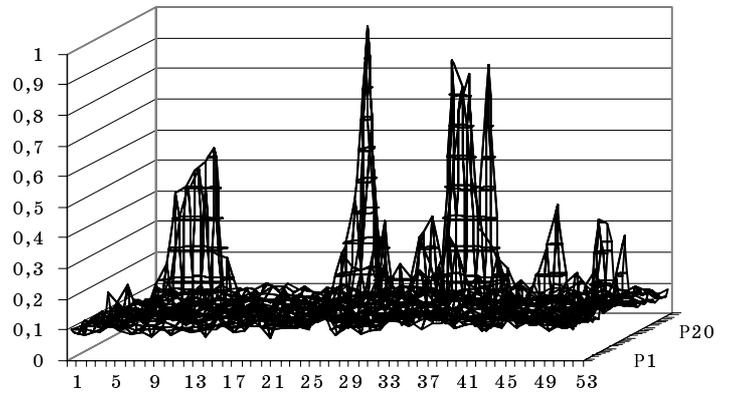
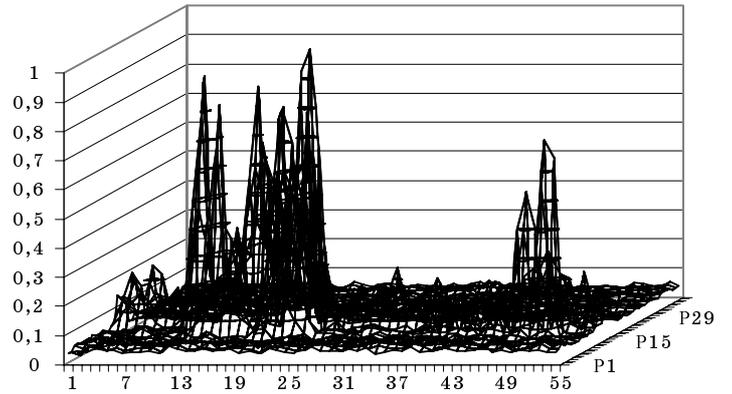
$$K_1 = \frac{S_c}{S_{\text{и}}},$$

где  $S_c$  — площадь объекта, сегментированного одним из методов;  $S_{\text{и}}$  — истинная площадь объекта на изображении. Соответственно, чем ближе коэффициент  $K_1$  к единице, тем эффективнее применяемый метод обработки.

*Степень выделения фона*. Этот критерий показывает, какова площадь изображения, выделенного для дальнейшего анализа, но не содержащая объектов интереса. Его оценка

$$K_2 = 1 - \frac{S_{\text{ф}}}{S_{\text{п}}},$$

где  $S_{\text{ф}}$  — площадь фона в выделенных для дальнейшего анализа областях изображения;  $S_{\text{п}}$  — площадь всего изображения. Соответственно, чем ближе коэффициент  $K_2$  к единице, тем эффективнее применяемый метод обработки.



■ Рис. 1. Поверхности, описывающие уровни детальности для тестовых последовательностей «Корабль», «Катер», «Самолеты», «Туман»

Эффективность обработки — критерий уровня полезной информации в данных, оставленных для дальнейшего анализа в результате классификации:

$$K_3 = \frac{S_c}{S_\phi}$$

Инвариантность к типу изображения  $K_4$  — критерий устойчивости значений коэффициентов  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  для различных изображений (разная степень присутствия фона, различный диапазон перепадов яркости и др.).

### Экспериментальное исследование и его результаты

Для проведения экспериментов были выбраны четыре тестовые последовательности. Их основные характеристики сведены в табл. 1.

С помощью специально разработанного программного обеспечения были получены значения коэффициентов  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  для 100 кадров каждой тестовой последовательности. В полученных выборках были определены средние значения коэффициентов  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ . Полученные результаты представлены на рис. 2. По этим данным была проведена ранговая оценка методов (табл. 2).

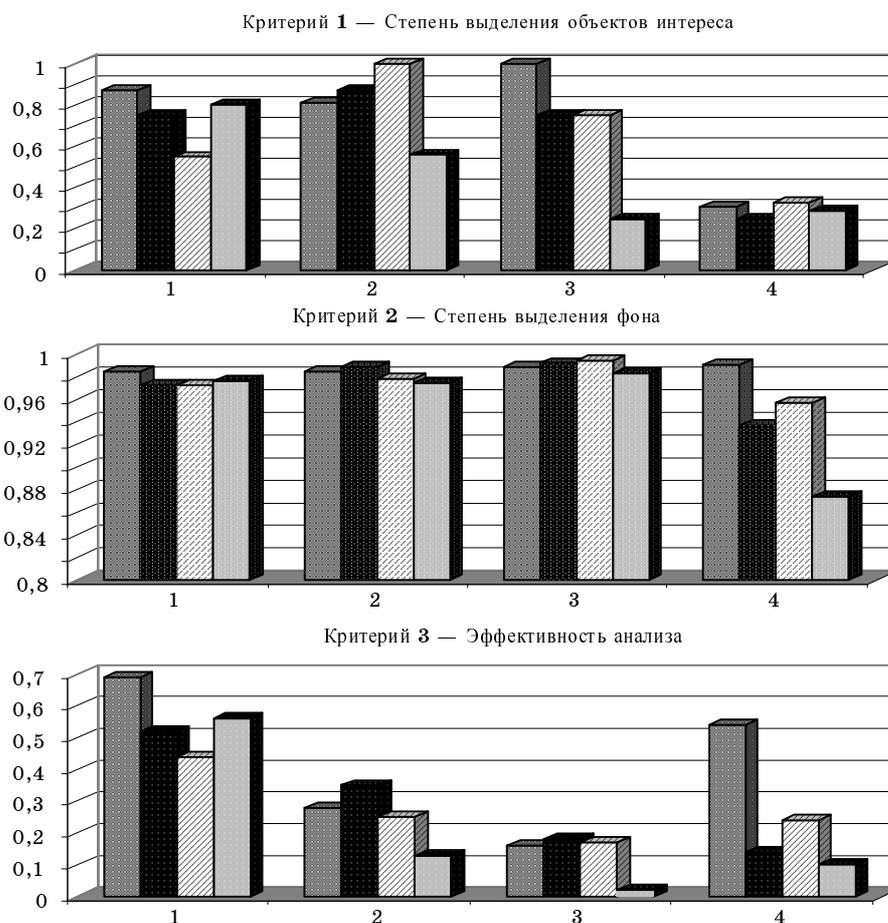
Соответствие рангов и численных значений критериев  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  очевидно, ранжирование ме-

тодов по критерию  $K_4$  было выполнено следующим образом. Наиболее устойчивым является метод пространственного дифференцирования. Это единственный метод, успешно справившийся со всеми тестовыми последовательностями, включая последовательность «Туман». Критерий  $K_2$ : степень выделения фона у него на всех последовательностях колеблется около 0,985. Все другие методы на последовательности «Туман» имеют значение критерия в 3–4 раза больше, что приводит к неудовлетворительному результату — существенному выделению фона. Наибольшей чувствительностью к характеру изображения обладает вейвлет-фильтр Добеши. Для последовательностей «Корабль» и «Катер» его характеристики близки к характеристикам остальных методов, а для последовательности «Самолеты» и «Туман» результат классификации практически отсутствует, что отражает и значения коэффициентов  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ . Соответственно, по критерию  $K_4$  ранги распределились следующим образом: 1 — пространственное дифференцирование, 2 — морфологический градиент, 3 — оператор Превитта, 4 — вейвлет-фильтр Добеши.

Таким образом, по сумме оценок наиболее эффективным способом обработки является пространственное дифференцирование. Результаты предварительной классификации на его основе представлены на рис. 3. Следует отметить, что по значениям критериев  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  обработка с помо-

■ Таблица 1

Название тестовой последовательности	Описание тестовой последовательности
«Корабль»	Характеристика объекта интереса: протяженный, медленно двигающийся (маневрирующий) объект Характеристика фона: средний уровень детальности — линия горизонта, небольшая рябь на воде Средняя яркость по фону — 163 Средняя яркость объекта — 103 Уровень контраста фон/объект — 0,36
«Катер»	Характеристика объекта интереса: протяженный, быстро двигающийся объект Характеристика фона: высокий уровень детальности — береговая линия с пирсом, существенная рябь на воде Средняя яркость по фону — 126 Средняя яркость объекта — 151 Уровень контраста фон/объект — 0,16
«Самолеты»	Характеристика объекта интереса: близкий к точечному, медленно двигающийся объект Характеристика фона: средний уровень детальности — облака Средняя яркость по фону — 205 Средняя яркость объекта — 98 Уровень контраста фон/объект — 0,52
«Туман»	Характеристика объекта интереса: протяженный, медленно двигающийся объект Характеристика фона: низкий уровень детальности — очень слабая рябь на воде Средняя яркость по фону — 150 Средняя яркость объекта — 147 Уровень контраста фон/объект — 0,02



■ Рис. 2. Средние значения критериев  $K_1, K_2, K_3$  для тестовых последовательностей: 1 — «Корабль», 2 — «Катер», 3 — «Самолеты», 4 — «Туман»; ■ — пространственное дифференцирование; ▨ — оператор Превитта; ■ — морфологический градиент; □ — вейвлет-фильтр Добеши

■ Таблица 2

Критерий	Метод обработки	Ранг для тестовых последовательностей				Сумма рангов	Результирующий ранг
		«Корабль»	«Катер»	«Самолеты»	«Туман»		
$K_1$	Пространственное дифференцирование	1	3	1	3	8	1
	Многомасштабный морфоградиент	2	2	2	4	10	3
	Оператор Превитта	4	1	2	2	9	2
	Вейвлет-фильтр Добеши Д4	3	4	3	1	11	4
$K_2$	Пространственное дифференцирование	1	2	1	3	7	1
	Многомасштабный морфоградиент	3	1	3	2	8	2
	Оператор Превитта	3	3	2	1	9	3
	Вейвлет-фильтр Добеши Д4	2	4	4	4	14	4
$K_3$	Пространственное дифференцирование	1	2	1	3	7	1
	Многомасштабный морфоградиент	3	1	3	1	8	2
	Оператор Превитта	4	3	2	2	11	3
	Вейвлет-фильтр Добеши Д4	2	4	4	4	14	4



■ Рис. 3. Результаты классификации изображения с помощью пространственного дифференцирования

щью пространственного дифференцирования близка к обработке на основе морфологического градиента (исключая последовательность «Туман»). Соответственно, при достаточных соотношениях контраста этот подход также обеспечивает весьма эффективное подчеркивание высокочастотной составляющей при предварительной классификации.

### Пороговая обработка

Последним шагом алгоритма предварительной классификации является пороговая обработка: на основании полученной оценки детальности блок должен быть оставлен или исключен из дальнейшего анализа.

Процедура формирования порога базируется на двух основных положениях.

1. Совокупность оценок детальности, полученных для всех блоков кадра, является выборкой случайной величины. Анализ и исследование ее гистограмм позволяет утверждать, что это случай-

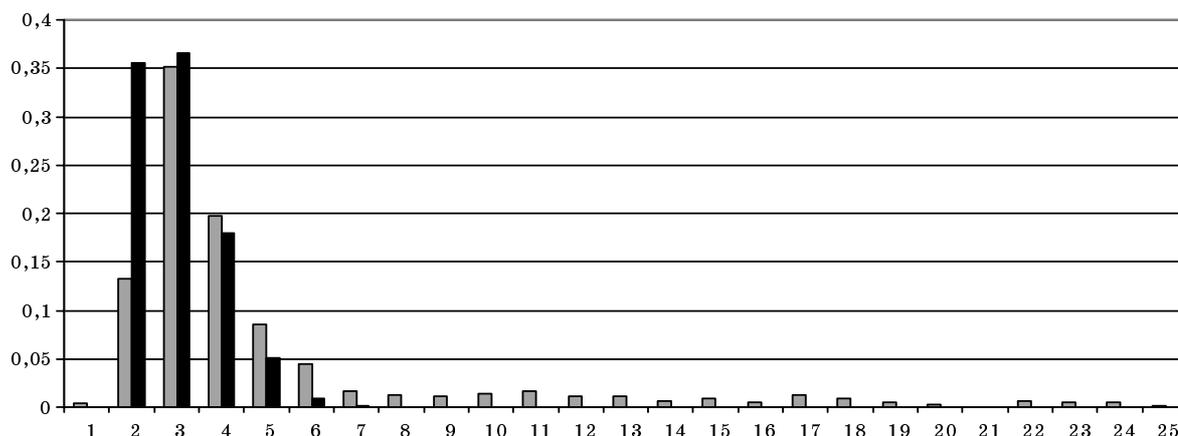
ная величина, описываемая распределением Релея:

$$w(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(\frac{-\rho^2}{2\sigma^2}\right).$$

Гистограммы распределения оценок детальности, полученные в ходе исследования, и теоретический вид функции распределения Релея при  $\sigma = 3$  показаны на рис. 4.

2. Задача предварительной обработки изображения является задачей бинарной классификации, что позволяет использовать критерий Неймана—Пирсона.

Первый класс  $D_1$  — блоки изображения с высокой вероятностью, содержащие объекты интереса. Второй класс  $D_2$  — блоки, не подлежащие дальнейшей обработке. Ошибкой первого рода  $p_0$  в данном контексте является отнесение блока изображения, содержащего объект интереса, к классу  $D_2$ ,



■ Рис. 4. Вид гистограммы:

■ — экспериментальная гистограмма; ■ — теоретическая гистограмма

ошибкой второго рода  $p_1$  — отнесение к классу  $D_1$  блока, не подлежащего дальнейшей обработке.

Суть стратегии Неймана — Пирсона состоит в следующем: задают допустимое значение вероятности ошибки первого рода  $p_0$ , а затем классификатор строят таким образом, чтобы обеспечить минимум вероятности ошибки второго рода  $p_1$ :

$$\begin{cases} p_0 = p_0^* \\ p_1 \rightarrow \min_{D_0, D_1} \end{cases}$$

Решением является классификатор вида

$$\lambda(y) = \frac{p(y/\Omega_1)}{p(y/\Omega_0)} > \lambda \Rightarrow \begin{cases} y \in D_1 \\ y \in D_0 \end{cases}$$

значение пороговой величины  $\lambda$  определяется, исходя из условия  $p_0 = p_0^*$ ;  $p(y/\Omega_1)$  и  $p(y/\Omega_0)$  — функции правдоподобия классов  $D_1$  и  $D_2$  [4].

Соответственно, в нашем случае пороговое значение

$$\lambda = \sqrt{\left(-2 \hat{\sigma}^2 \ln(p_0)\right)},$$

где  $\hat{\sigma}$  — оценка  $\sigma$ .

Из теории известно, что максимальная плотность при распределении Релея достигается при  $\rho = \sigma$ . Эта особенность позволяет предложить быстрый и удобный для практической реализации способ оценки параметра  $\sigma$  по экспериментальной гистограмме

$$\hat{\sigma} = \min + \text{num\_max} \times \text{int} + \text{int}/2,$$

где  $\min$  — минимальное значение оценки детальности;  $\text{num\_max}$  — номер интервала гистограммы с максимальной частотой попадания случайной величины;  $\text{int}$  — величина интервала.

## Выводы

Предложенный алгоритм предварительной классификации позволяет выделить области изображения с заданной вероятностью, содержащие объекты интереса. Как показали экспериментальные исследования, это дает возможность исключить из последующей обработки до 80 % кадра, тем самым резко снизить вычислительную и алгоритмическую сложность последующих процедур. Значимым достоинством предлагаемого алгоритма является отсутствие существенных ограничений на скорость, линейные размеры и яркостные характеристики объектов интереса.

## Литература

1. Обухова Н. А., Тимофеев Б. С. Сегментация и сопровождение объектов на основе анализа видеопоследовательности // IV Междунар. конф. «Телевидение: передача и обработка изображений»: Тез. докл. / СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2005. С. 87–89.
2. Тимофеев Б. С. Видеокомпьютерные системы для наблюдения за движущимися объектами // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. 2003. № 4. С. 32–44.
3. Обухова Н. А. Обнаружение и сопровождение движущихся объектов методом сопоставления блоков // Информационно-управляющие системы. 2004. № 1. С. 30–37.
4. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В. А. Соифера. М.: Физматлит, 2003. 784 с.
5. Maragos S. Tutorial an advances in morphological image processing and analysis // Optical Engineering. July 1987. N 26(7). P. 623–632.
6. Киселев А. Вейвлет своими руками / BaseGroup Labs, 2003. [http://www.basegroup.ru/filtration/making\\_wavelet.htm](http://www.basegroup.ru/filtration/making_wavelet.htm)
7. Уэлстид С. Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии: Учеб. пособие. М.: Триумф, 2003. 320 с.

УДК. 519.95

## ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА ОСНОВЕ ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

**С. Д. Субочев,**

канд. техн. наук, вед. программист

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Получено одинаковое выражение для радиуса малой дуги оптимальной траектории в двух физических моделях — движения точки с единичной скоростью и распространения луча света. Принцип минимального времени распространения света в трехмерном физическом пространстве обобщается и на многомерное пространство и используется для разработки соответствующего численного метода пристрелки при построении оптимальных многомерных траекторий. Оптимальность траекторий, найденных методом пристрелки, подтверждена формальным, но строгим математическим градиентным методом.

We derive an expression for the radius of a small arc of the optimal trajectory in two physical models: the motion of a point with unit velocity and the propagation of a light ray. The principle of minimal propagation time in three-dimensional physical space is generalised to high-dimensional space and is used for the elaboration of the corresponding digital method of fire adjustment in constructing the optimal high-dimensional trajectories. The optimality of the obtained trajectories is justified by a formal mathematical gradient method.

### Введение

Пусть заданы некоторая положительная функция потерь или затрат от  $n$  переменных  $F(\mathbf{r}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ , а также начальная и конечная точки  $\mathbf{r}_{\text{beg}} = [x_{1b}, x_{2b}, \dots, x_{nb}]^T$  и  $\mathbf{r}_{\text{end}} = [x_{1e}, x_{2e}, \dots, x_{ne}]^T$  соответственно.

Оптимальной траекторией является линия  $L$ , соединяющая эти две точки, такая, что криволинейный интеграл  $I$  вдоль этой линии от заданной функции минимален:

$$L: \left\{ I = \int_L F(\mathbf{r}) dl = \min \right\}. \quad (1)$$

В статье описывается метод поиска оптимальной траектории, разработанный на основе использования физических моделей. Аналогичный подход использовался и в работе [1] для оптимизации по времени двумерных задач.

В монографии [2] отмечается, что физический подход к решению некоторых геометрических задач использовался выдающимися учеными прошлых столетий. Авторами этот подход развивается и производится обобщение понятия центра тяжести твердого тела и на многомерные пространства.

Обобщение физических моделей и аналогий на многомерные пространства зачастую позволяет эффективно и наглядно решать задачи, решение которых «чисто математическими» методами затруднительно и неочевидно.

Так, например, в методе наискорейшего спуска для поиска экстремума овражных функций составляются дифференциальные уравнения безынерционного движения «материальной» точки в многомерном пространстве [3].

Известны многомерные сферические координаты [4, 5]. Эти координаты задаются углами, которые являются обобщенными физическими аналогами углов широты и долготы.

В статье развивается ранее означенный и нами подход [6] с обобщением физических аналогий на многомерные пространства для поставленной оптимизационной задачи.

### Определение радиуса кривизны малой дуги оптимальной траектории на основе модели движения

Допустим, что координаты некоторой текущей точки в многомерном пространстве являются функциями времени. Тогда малый вектор перемещения

этой точки  $\Delta r$  при разложении в ряд Тейлора с точностью до 2-го порядка малости по времени  $\Delta t^2$  записывается так:

$$\Delta r = [\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n]^T \approx V\Delta t + W\Delta t^2/2, \quad (2)$$

где

$$V = r' = [x'_1, x'_2, \dots, x'_n]^T, \quad (3)$$

$$W = r'' = [x''_1, x''_2, \dots, x''_n]^T \quad (4)$$

— векторы первых и вторых производных координат по времени соответственно (и где приняты обозначения  $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$  и  $x''_i = \frac{d^2x_i}{dt^2}$ ).

Вектор  $V$  по своему физическому смыслу является вектором скорости, а вектор  $W$  — вектором ускорения в многомерном пространстве. Наложим ограничение, что модуль вектора скорости всегда имеет единичное значение

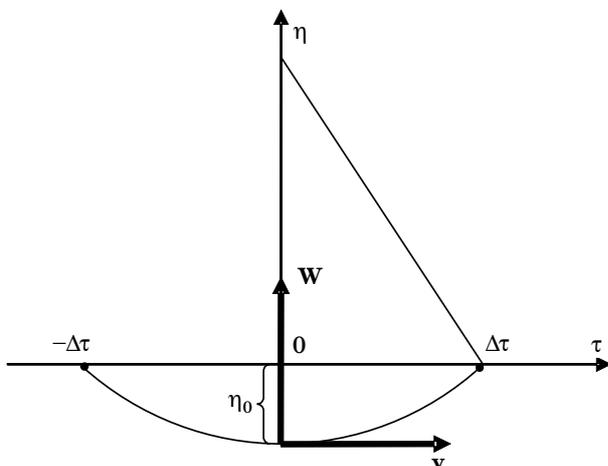
$$\|V\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x'_i)^2} = 1. \quad (5)$$

Дифференцируя (5) по времени, получаем, что скалярное произведение векторов скорости и ускорения тождественно равно нулю:

$$\frac{d}{dt} \|V\| \equiv \langle V, W \rangle \equiv 0. \quad (6)$$

Условие (6) означает ортогональность векторов скорости и ускорения, при этом можно положить, что и в многомерном пространстве при постоянной скорости движения полное ускорение является только нормальным, аналогично как и в трехмерном.

Направим касательную ось  $O\tau$  параллельно вектору скорости  $V$  на середине дуги, а нормальную ось  $O\eta$  — по вектору ускорения  $W$  (рис. 1), распо-



■ Рис. 1. Малая дуга оптимальной траектории

ложим начало и конец малой дуги траектории лежащими на касательной оси  $O\tau$  в фиксированных, равноотстоящих от нуля точках с координатами, соответственно:

$$r_{\text{beg}} = [-\Delta\tau, 0]^T, \quad r_{\text{end}} = [\Delta\tau, 0]^T. \quad (7)$$

Тогда отрезок прямой, соединяющий по оси  $O\tau$  эти точки с координатами (7), является хордой дуги. Так как любое малое перемещение  $\Delta r$  с точностью до 2-го порядка малости раскладывается по двум ортогональным базисным векторам  $V$  и  $W$ , малую дугу траектории можно считать плоской, т. е. лежащей в плоскости рисунка  $O\tau\eta$ . Радиус кривизны траектории  $R_k$  и модуль нормального ускорения связаны общеизвестным соотношением, которое при единичной скорости записывается так:

$$\|W\| = \|V\|^2 R_k^{-1} \equiv R_k^{-1}. \quad (8)$$

При этом векторы скорости и ускорения в проекциях на координатные оси

$$V = [\tau', \eta']^T = [1, 0]^T; \quad (9)$$

$$W = [\tau'', \eta'']^T = [0, R_k^{-1}]^T, \quad (10)$$

откуда уравнения траектории относительно середины дуги с точностью до 2-го порядка малости при  $-\Delta\tau \leq t \leq \Delta\tau$  равны

$$\eta_\tau \approx t^2 R_k^{-1} / 2 - \eta_0, \quad (11)$$

где высота параболического сегмента дуги

$$\eta_0 \approx \Delta\tau^2 R_k^{-1} / 2. \quad (12)$$

Вместо функции от  $N$  переменных  $F(x_1, x_2, \dots, x_N)$  рассмотрим соответствующее ей сечение  $F(\tau, \eta)$  в плоскости  $O\tau\eta$ . При фиксированных концах (7) элементарная дуга окружности полностью определяется радиусом кривизны. Определим оптимальный радиус кривизны этой малой дуги  $R_k^{\text{opt}}$  такой, что криволинейный интеграл

$$I(R_k) = \int_{-\Delta\tau}^{\Delta\tau} F[\eta_\tau(\tau/R_k)] m(\tau/R_k) d\tau, \quad (13)$$

зависящий от параметра  $R_k$ , будет минимален, т. е.

$$I(R_k^{\text{opt}}) = \min \{I(R_k)\}. \quad (14)$$

С точностью до 2-го порядка малости

$$\eta_\tau(\tau/R_k) \approx \tau^2 R_k^{-1} / 2 - \eta_0 \quad (15)$$

— уравнение траектории (в котором произведена замена переменной  $t = \tau$ ),

$$m(\tau/R_k) d\tau = \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta_\tau}{d\tau}\right)^2} d\tau \approx \left(1 + \frac{\tau^2}{2R_k^2}\right) d\tau \quad (16)$$

— дифференциал длины дуги.

С целью упрощения и удобства дальнейшей разработки метода и соответствующего алгоритма поиска оптимальной траектории зададим начальную точку от середины дуги, оставив конечную точку прежней:

$$\mathbf{r}_{\text{beg}} = [0, -\eta_0]^T, \quad \mathbf{r}_{\text{end}} = [\Delta\tau, 0]^T, \quad (17)$$

и перейдем к задаче определения оптимального радиуса кривизны, который минимизирует криволинейный интеграл, рассчитанный только для правой половинки дуги элементарной траектории:

$$I(R_k) = \int_0^{\Delta\tau} F[\eta_\tau(\tau/R_k)]m(\tau/R_k)d\tau; \quad (18)$$

$$I(R_k^{\text{opt}}) = \min\{I(R_k)\}. \quad (19)$$

В этой новой задаче, как и прежде, зафиксирована конечная точка. Для новой начальной точки  $\mathbf{r}_{\text{beg}} = [0, -\eta_0]^T$  зафиксирована координата  $\tau = 0$ , а координата  $\eta_0$ , рассчитываемая как (12), является варьируемой по радиусу кривизны. При этом векторы скорости и ускорения, записанные в проекциях на координатные оси как  $\mathbf{V} = [1, 0]^T$  и  $\mathbf{W} = [0, R_k^{-1}]^T$ , имеют постоянные направления, независимые от радиуса кривизны. Для старой начальной точки  $\mathbf{r}_{\text{beg}} = [-\Delta\tau, 0]^T$  направления векторов скорости и ускорения варьируются в зависимости от радиуса кривизны, что существенно усложняет задачу оптимизации. Этим и объясняется переход ко второй постановке задачи, решение которой, строго говоря, является квазиоптимальным, так как новая начальная точка не зафиксирована по координате  $\eta$ .

Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора относительно нулевой точки с точностью до 2-го порядка малости

$$F(0 + \tau, 0 + \eta) \approx F + \frac{\partial F}{\partial \tau} \tau + \frac{\partial F}{\partial \eta} \eta + \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \frac{\tau^2}{2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \tau \partial \eta} \tau \eta + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \frac{\eta^2}{2}, \quad (20)$$

где численные значения функции и ее соответствующих частных производных берутся в нулевой точке в начале координат  $0\tau\eta$  ( $\tau = 0, \eta = 0$ ).

Положим, что  $R_k > 1$  и запишем минимизируемый по параметру  $R_k$  интеграл в виде суммы двух интегралов

$$I(R_k) \approx I_0(R_k) + I_2(R_k), \quad (21)$$

которые берутся соответственно от нулевого и 2-го членов ряда Тейлора (20):

$$I_0(R_k) = \int_0^{\Delta\tau} Fm(\tau/R_k)d\tau; \quad (22)$$

$$I_2(R_k) = \int_0^{\Delta\tau} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \eta(\tau/R_k)m(\tau/R_k)d\tau. \quad (23)$$

Подставляя в формулы для интегралов (22) и (23) уравнения траектории (15) и дифференциала дуги (16), производя интегрирование по  $\tau$  и затем дифференцирование по  $R_k$ , из условия

$$\frac{dI}{dR_k} = 0 \quad (24)$$

находим радиус кривизны малой дуги оптимальной траектории как

$$R_k^{\text{opt}} \approx (F'_\eta)^{-1} F, \quad (25)$$

где  $F'_\eta = \frac{\partial F}{\partial \eta}$  — производная по нормальному направлению.

При решении уравнения (24) был учтен 3-й порядок малости  $\Delta\tau^3$  в интегралах  $I_0$  и  $I_2$ , берущихся от нулевого и 2-го членов ряда Тейлора (20).

Остальные члены ряда Тейлора, имеющие более высокие порядки малости, отбрасываются.

Итак, чтобы найти  $R_k^{\text{opt}}$ , надо задать координаты  $\mathbf{r}$  и вектор единичной скорости  $\mathbf{V}$  (или единичный вектор касательного направления  $\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{V}$ ).

Если модуль некоторого вектора скорости не нормирован к единице:  $\|\mathbf{V}_H\| \neq 1$ , то следует перейти к единичной скорости (или единичному вектору направления  $\boldsymbol{\tau}$ )

$$\mathbf{V} = \|\mathbf{V}_H\|^{-1} \mathbf{V}_H \equiv \boldsymbol{\tau}. \quad (26)$$

Далее необходимо найти вектор нормальной составляющей градиента функции

$$\nabla F_\eta = \nabla F - \langle \nabla F, \boldsymbol{\tau} \rangle \boldsymbol{\tau}, \quad (27)$$

рассчитать производную по направлению нормали

$$F'_\eta = \|\nabla F_\eta\| \quad (28)$$

и, подставляя (28) в (25), определить оптимальный радиус кривизны

$$R_k^{\text{opt}} \approx (F'_\eta)^{-1} F = \|\nabla F_\eta\|^{-1} F. \quad (29)$$

При этом единичный вектор нормали

$$\boldsymbol{\eta} = \|\nabla F_\eta\|^{-1} \nabla F_\eta. \quad (30)$$

Движение по оси  $0\tau$  является заданным, или вынужденным, а по оси  $0\eta$  — варьируемым, выбранным из условия минимума (1). Результат имеет очевидный смысл: при увеличении радиуса кривизны слагаемое  $I_0(R_k) \approx F\Delta\tau$  (21) растет, так как увеличивается длина дуги  $\Delta t$ , а слагаемое  $I_2(R_k) \approx$

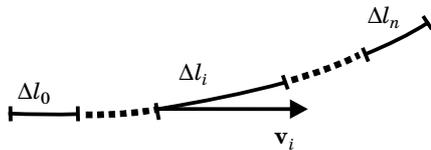
$\approx -F_{\eta}' \Delta t^3 / R_{\kappa}$  убывает, так как дуга выгибается в сторону меньших значений функции, и при условии (29) достигается минимум.

**Обобщение модели распространения света по оптимальной траектории на многомерное пространство**

Определим радиус кривизны малой дуги оптимальной траектории на основе известного факта, что свет в оптической среде с переменной оптической плотностью распространяется из начальной точки в конечную по некоторой траектории, такой, что время распространения — минимально. Допустим, что свет распространяется по некоторой кривой  $L$ , приходя из некоторой начальной точки в конечную (рис. 2). Разобьем кривую  $L$  на  $n$

малых отрезков  $\Delta l_i$  так, что  $\sum_{i=1}^n \Delta l_i = L$ . Обозначая

модуль скорости света на малом отрезке  $\|\mathbf{V}_i\|$  и учитывая, что время распространения света на отрезке  $\Delta t_i = \|\mathbf{V}_i\|^{-1} \Delta l_i$ , запишем суммарное время распространения  $T$  по линии  $L$  как предельный переход к соответствующему криволинейному интегралу:



■ Рис. 2. Элементарные участки траектории луча света

$$T = \lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta l_i}{\|\Delta \mathbf{V}_i\|} = \int_L \|\mathbf{V}_c(l)\|^{-1}, \quad (31)$$

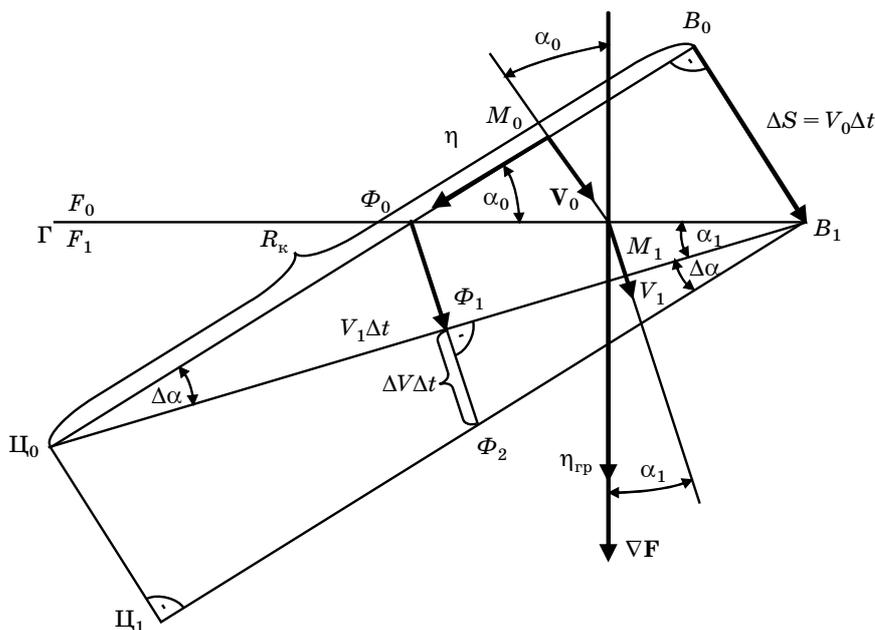
где  $\|\mathbf{V}_c(l)\|$  — модуль скорости света в оптической среде как функция положения в зависимости от текущей длины  $l$  на траектории  $L$ . Запишем известное соотношение в виде

$$\|\mathbf{V}_c(l)\| = F_c^{-1}(l) \|\mathbf{V}_B\|, \quad (32)$$

где  $F_c(l)$  — абсолютный показатель преломления оптической среды;  $\|\mathbf{V}_B\|$  — модуль скорости света в вакууме. Тогда, подставляя (32) в (31), запишем принцип минимума времени распространения света

$$L : \min \left\{ \int_{L_V} F_c(l) dl \right\} = \int_L F_c(l) dl, \quad (33)$$

где  $L_V$  — некоторая варьируемая траектория;  $L$  — траектория луча света, вдоль которой «автоматически» достигается минимум интеграла от функции  $F_c(l)$  — переменного показателя преломления оптической среды. Из курса оптики известна соответствующая закону Снеллиуса [7] простая иллюстрация преломления луча света при прохождении через границу двух слоев с разными показателями преломления  $F_0$  и  $F_1$  (рис. 3, дополненный необходимыми построениями). Луч света при переходе границы  $\Gamma$  уменьшает скорость со значения  $V_0$  до значения  $V_1$  (так как  $F_1 > F_0$ );  $\eta_{\text{гр}}$  — нормаль к граничной поверхности, разделяющей слои с различной оптической плотностью (градиент  $\nabla F$  направлен по нормали  $\eta_{\text{гр}}$ );  $\alpha_0$  — угол падения;  $\alpha_1$  —



■ Рис. 3. Преломление луча света при прохождении границы двух сред с разной оптической плотностью

угол преломления;  $\Phi_0 B_0$  — длина фронта падающей волны, а  $\Phi_1 B_1$  — преломленной; точки  $M_0$  и  $M_1$  — середины этих фронтов соответственно. Прямые углы отмечены точками.

Правый крайний падающий луч за время  $\Delta t$  проходит малый путь

$$B_0 B_1 = V_0 \Delta t. \quad (34)$$

Левый крайний преломленный луч проходит путь

$$\Phi_0 \Phi_1 = V_1 \Delta t. \quad (35)$$

Очевидно, что через точки  $M_0$  и  $M_1$  можно провести дугу окружности касательно к векторам скоростей. Тогда радиус кривизны этой дуги

$$R_k = \Pi_0 M_0 = \Pi_1 M_1 = \Delta \alpha^{-1} \Delta L_{01}, \quad (36)$$

где точка  $\Pi_0$  образуется пересечением продолженных прямых линий фронтов  $\Phi_0 B_0$  и  $\Phi_1 B_1$ ;  $\Delta \alpha$  — угол между прямыми  $\Pi_0 M_0$  и  $\Pi_0 M_1$ ;  $\Delta L_{01}$  — длина дуги, приходящей из точки  $M_0$  в точку  $M_1$ .

С точностью до 1-го порядка малости заменим длину дуги  $\Delta L_{01}$  на путь крайнего правого падающего луча

$$\Delta L_{01} \approx \Delta S = V_0 \Delta t \approx V_B F_0^{-1} \Delta t. \quad (37)$$

Прямая  $\Pi_1 B_1$  параллельна прямой  $\Pi_0 B_0$ , тогда с точностью до 1-го порядка малости (см. треугольник  $\Phi_1 B_1 \Phi_2$ )

$$\Delta \alpha \approx \Delta V \Delta t / \Phi_1 B_1 \approx \Delta V \Delta t / \Phi_0 B_0, \quad (38)$$

где

$$\Phi_0 B_0 = \Delta S \operatorname{ctg} \alpha_0 \approx \Delta L_{01} \operatorname{ctg} \alpha_0; \quad (39)$$

$$\Delta V = V_0 - V_1 = \frac{V_B}{F_0} - \frac{V_B}{F_1} \approx \frac{V_B \Delta F}{F_0^2}, \quad (40)$$

где приращение показателя преломления вдоль линии  $\Delta L_{01}$

$$\Delta F = F_1 - F_0. \quad (41)$$

Расписывая (38) далее, имеем

$$\Delta \alpha \approx V_B \Delta t F_0^{-2} \sin \alpha_0 \left( \frac{\Delta F}{\Delta L_{01} \cos \alpha_0} \right). \quad (42)$$

Отношение  $\Delta F / \Delta L_{01}$  в пределе при  $\Delta L_{01} \rightarrow 0$  представляет собой производную по направлению  $L$  (по касательной оси  $0\tau$ ), которая равна проекции градиента на это направление:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \lim_{\Delta L_{01} \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta L_{01}} = \langle \nabla F, \tau \rangle = \|\nabla F\| \cos \alpha_0, \quad (43)$$

а проекция градиента на нормальное направление  $0\eta$  равна частной производной по этому направлению:

$$F'_\eta = \frac{\partial F}{\partial \eta} = \langle \nabla F, \eta \rangle = \|\nabla F\| \sin \alpha_0. \quad (44)$$

Тогда, подставляя (44) и (43) в (42), а (42) в (36), после несложных преобразований окончательно имеем

$$R_k^{\text{opt}} \equiv R_k \approx (F'_\eta)^{-1} F. \quad (45)$$

То есть и во второй физической модели, независимо от первой, получен тот же самый результат (29), что подтверждает правильность физических моделей и математических выкладок. Соответствие критерия оптимальности траектории минимуму времени прохождения света по этой траектории дает возможность применить принцип пошаговой оптимизации: если каждый шаг оптимален, то оптимальна и вся траектория в целом. При пошаговом движении необходимо попасть из начальной точки в конечную.

### Алгоритм поиска оптимальной траектории методом пристрелки

Входными величинами на каждый  $i$ -й шаг являются местоположение текущей точки  $\mathbf{r}_i = [x_{1i}, x_{2i}, x_{ni}]^T$  и заданное направление движения в виде вектора единичной скорости или в виде единичного вектора направления  $\mathbf{V}_i \equiv \tau_i = [x'_{1i}, x'_{2i}, \dots, x'_{ni}]^T$ . Кроме того, должны быть рассчитаны радиус кривизны  $R_{ki}$  и вектор нормали  $\eta_i$  по формулам (27)–(30).

Далее рассчитываются соответствующие выходные величины  $i$ -го шага

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \eta_i \Delta \eta_i + \tau_i \Delta \tau_i, \quad (46)$$

где  $\Delta \tau_i$  — малое перемещение по касательной (которое задается одинаковым для всех шагов);

$$\Delta \eta_i = \Delta \tau_i \operatorname{tg} \theta_i \quad (47)$$

— малое перемещение по нормали.

$$\tau_{i+1} = \sin \theta_i \eta_i + \cos \theta_i \tau_i, \quad (48)$$

где

$$\theta_i = \arcsin \left( \frac{\Delta \tau_i}{R_{ki}} \right) \quad (49)$$

— угол раствора  $i$ -й дуги траектории.

Таким образом, если в заданной начальной точке  $\mathbf{r}_0 \equiv \mathbf{r}_{\text{beg}} = [x_{1b}, x_{2b}, \dots, x_{nb}]^T$  задать и некоторое начальное направление  $\tau_0$ , то текущая точка, перемещаясь по шагам, будет двигаться по определенной траектории, которая в общем случае пройдет мимо заданной конечной точки  $\mathbf{r}_{\text{end}} = [x_{1e}, x_{2e}, \dots, x_{ne}]^T$ .

Поэтому надо скорректировать начальное направление движения так, чтобы попасть в конечную точку. Условием окончания пути движущейся текущей точки является условие пересечения сферы радиусом  $R_{\text{сф}}$

$$\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{\text{beg}}\| < R_{\text{сф}} \cap \|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_{\text{beg}}\| \geq R_{\text{сф}}, \quad (50)$$

где

$$R_{\text{сф}} = \|\mathbf{r}_{\text{end}} - \mathbf{r}_{\text{beg}}\|. \quad (51)$$

На этой сфере должны заканчиваться все пробные (или пристрелочные) траектории. При выполнении условия (51), решая уравнение

$$R_{\text{сф}}^2 - \|\mathbf{r}_{i_3}(t_{\text{сф}}) - \mathbf{r}_{\text{beg}}\|^2 = 0, \quad (52)$$

найдем экстраполированную точку траектории  $r_{i_3}(t_{\text{сф}})$ , которая лежит на этой сфере. Траектория экстраполируется рядом Тейлора до 5-го порядка малости

$$\mathbf{r}_3(t) \approx \mathbf{r} + \sum_{m=1}^5 \frac{d^m \mathbf{r}}{dt^m} \frac{t^m}{m!}, \quad (53)$$

где соответствующие производные от радиуса вектора  $\mathbf{r}$  рассчитываются как для четных порядков:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\boldsymbol{\eta}}{R_{\kappa}}, \quad \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\boldsymbol{\eta}}{R_{\kappa}^3}, \quad (54)$$

так и для нечетных:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\tau}, \quad \frac{d^3 \mathbf{r}}{dt^3} = -\frac{\boldsymbol{\tau}}{R_{\kappa}^2}, \quad \frac{d^5 \mathbf{r}}{dt^5} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{R_{\kappa}^4}, \quad (55)$$

где  $R_{\kappa}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\boldsymbol{\eta}$  — радиус кривизны, касательный и нормальный векторы, соответственно, в предпоследней точке траектории, от которой производится экстраполяция.

Далее уравнение (52) решается методом последовательных приближений

$$t_{j+1} = t_j + [R_{\text{сф}}^2 - S_{\text{кв}}(t_j)] / S'_{\text{кв}}(t_j), \quad (56)$$

где  $j$  — номер итерации;

$$S_{\text{кв}}(t_j) = \|\mathbf{r}_3(t_j) - \mathbf{r}_{\text{beg}}\|^2 \quad (57)$$

— квадратический путь экстраполируемой точки;

$$S'_{\text{кв}}(t_j) = \|\mathbf{r}'_3(t_j) - \mathbf{r}'_{\text{beg}}\|^2 \quad (58)$$

— производная квадратического пути;

$$\mathbf{r}'_3(t_j) \equiv \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} = \sum_{m=1}^5 \frac{d^m \mathbf{r}}{dt^m} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \quad (59)$$

— производная экстраполируемого радиуса-вектора.

Определив конечную точку некоторой пристрелочной траектории, лежащую на сфере  $\mathbf{r}_{\text{пп}} \equiv \mathbf{r}_3(t_{\text{сф}})$ , где  $t_{\text{сф}}$  — время на последней итерации, при котором экстраполируемая точка достигает сферы, рассчитаем направляющие косинусы прямой линии, соединяющей начало траектории и точку  $j$ -й пристрелки  $\mathbf{r}_{\text{пп}j}$ :

$$\mathbf{e}_{\text{пп}j} = R_{\text{сф}}^{-1}(\mathbf{r}_{\text{пп}j} - \mathbf{r}_{\text{beg}}), \quad (60)$$

при этом направляющие косинусы прямой линии, соединяющей начало и конец требуемой оптимальной траектории:

$$\mathbf{e}_{\text{тр}} = R_{\text{сф}}^{-1}(\mathbf{r}_{\text{end}} - \mathbf{r}_{\text{beg}}). \quad (61)$$

Этим векторам направлений  $\mathbf{e}_{\text{пп}j}$  и  $\mathbf{e}_{\text{тр}}$  некоторым образом соответствуют векторы начальных касательных направлений  $\boldsymbol{\tau}_{\text{пп}j}$  и  $\boldsymbol{\tau}_{\text{тр}}$  пристрелочной траектории  $T_{\text{пп}j}$  и требуемой оптимальной траектории  $T_{\text{тр}}$  (рис. 4, где траектория  $T_{\text{тр}}$  условно наклонена к нам, а  $T_{\text{пп}j}$  — от нас). Вектор касательного направления оптимальной траектории  $\boldsymbol{\tau}_{\text{тр}}$  пока не известен. Следовательно, надо в вектор  $\mathbf{e}_{\text{пп}j}$  вносить такие поправки, чтобы вектор совместился с вектором  $\mathbf{e}_{\text{тр}}$ .

Это сделаем таким образом. Рассчитаем поправку на плоскости  $\Pi$ , натянутой на два вектора  $\mathbf{e}_{\text{пп}j}$  и  $\mathbf{e}_{\text{тр}}$ :

$$\Delta \mathbf{e}_{\text{пп}j} = \mathbf{e}_{\text{пп}j} - \mathbf{e}_{\text{тр}}. \quad (62)$$

Пусть ненормированный вектор направления пристрелки  $\mathbf{c}_{\text{пп}j}$  продолжен по нормированному вектору пристрелки  $\boldsymbol{\tau}_{\text{пп}j}$  таким образом, что проекция вектора  $\mathbf{c}_{\text{пп}j}$  на плоскость  $\Pi$  есть вектор  $\mathbf{e}_{\text{пп}j}$ . В соответствии с этим модуль ненормированного вектора

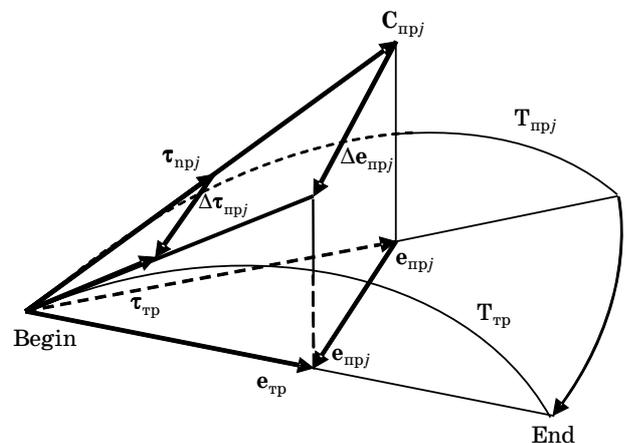
$$\|\mathbf{c}_{\text{пп}j}\| = \langle \boldsymbol{\tau}_{\text{пп}j}, \mathbf{e}_{\text{пп}j} \rangle^{-1}. \quad (63)$$

Вектор  $\mathbf{c}_{\text{тр}j}$  свяжем с векторами  $\boldsymbol{\tau}_{\text{тр}j}$  и  $\mathbf{e}_{\text{тр}}$  аналогичными построениями, модуль этого вектора

$$\|\mathbf{c}_{\text{тр}}\| = \langle \boldsymbol{\tau}_{\text{тр}}, \mathbf{e}_{\text{тр}} \rangle^{-1} = \|\mathbf{c}_{\text{пп}j}\|. \quad (64)$$

Ненормированный  $(j+1)$ -й вектор пристрелки сформируем как

$$\mathbf{c}_{\text{пп}j+1} = \mathbf{c}_{\text{тр}} = \mathbf{c}_{\text{пп}j} + \Delta \mathbf{e}_{\text{пп}j}. \quad (65)$$



■ Рис. 4. Соотношение векторов в методе пристрелки

Тогда с учетом подобия треугольников, образованных парами векторов  $\tau_{тр}$ ,  $\tau_{прj}$  и  $c_{тр}$ ,  $c_{прj}$ , нормированный  $j + 1$ -й вектор пристрелки сформируем так:

$$\tau_{прj+1} = \tau_{тр} = \tau_{прj} + \langle \tau_{тр}, e_{тр} \rangle \Delta e_{прj}. \quad (66)$$

Условием окончания итераций пристрелки (66) можно выбрать уменьшение угловой ошибки на сфере ниже минимального заданного предела

$$\|\Delta e_{прj}\| \leq \delta_{\min} \quad (67)$$

либо задавать заведомо большее количество циклов пристрелки, чем необходимо для выполнения условия (67). Чтобы не накапливались погрешности, единичный вектор направления, рассчитываемый по формулам (47) и (49), следует нормировать на каждом шаге вновь по формуле (26). Заметим, что, строго говоря, точка начала координат  $O\eta$ , относительно которой рассчитывается радиус кривизны, нам неизвестна, а фактически известна точка начала дуги с координатами  $r_{\text{beg}} = [0, -\eta_0]^T$ . Как показало промежуточное моделирование (результаты которого здесь не приводятся), процесс итерационного поиска точки начала координат от точки начала дуги через радиус кривизны не всегда приводит к необходимому уменьшению интеграла. Поэтому в формулах (29) и (45) следует рассчитывать постоянное значение функции и ее производной по нормали относительно доступной точки начала дуги по приближенным формулам

$$F(0, 0) \approx F(0, -\eta_0), \quad F'_\eta(0, 0) \approx F'_\eta(0, -\eta_0). \quad (68)$$

### Вычисление криволинейного интеграла вдоль оптимальной траектории

Этот интеграл требуется не только для проверки различных траекторий на оптимальность, но также и для оценивания затрат или потерь наблюдателем. При выводе формулы (29) при разложении в ряд Тейлора были учтены варьируемые составляющие – в интегралах  $I_0(R_k)$  и  $I_2(R_k)$ , которые оказывают наибольшее влияние на минимизацию интеграла вдоль малой дуги. Однако при большей протяженности траектории следует учесть и составляющие  $I_1(R_k)$  и  $I_3(R_k)$ , которые вносят хотя и менее варьируемый – более постоянный, но зато существенный вклад в минимизируемый интеграл. Зафиксировав найденный оптимальный радиус (45), определим длину дуги как  $\Delta t_i = R_k \theta_i$ , где  $\theta_i$  – угол раствора дуги. Далее, опуская индекс  $i$ , возьмем четыре учтенные до 3-го порядка малости составляющие интеграла вдоль дуги окружности:

$$I_0 = \int_0^{\Delta t} F dt = F \Delta t; \quad (69)$$

$$I_1 = \int_0^{\Delta t} \frac{\partial F}{\partial \tau} \tau_r(t) dt = \frac{\partial F}{\partial \tau} R_k^2 (1 - \cos \theta); \quad (70)$$

$$I_2 = \int_0^{\Delta t} \frac{\partial F}{\partial \eta} \eta_r(t) dt = \frac{\partial F}{\partial \eta} (R_k \Delta t \cos \theta - R_k^2 \sin \theta); \quad (71)$$

$$I_3 = \int_0^{\Delta t} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \frac{\tau_r^2(t)}{2} dt = \frac{R_k^2}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \left( \Delta t - \frac{R_k}{2} \sin 2\theta \right). \quad (72)$$

Составляющая  $I_0$  имеет 1-й порядок малости. Несложно показать, что составляющие  $I_1; I_2$  и  $I_3$  имеют 2-й и 3-й порядки малости соответственно:

$$I_1 \approx \frac{\partial F}{\partial \tau} \frac{\Delta t^2}{2}; \quad I_2 \approx -\frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\Delta t^3}{3R_k}; \quad I_3 \approx -\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \frac{\Delta t^3}{6}.$$

На последнем шаге траектории, при котором пересекается сфера, в формулы (69)–(72) следует подставлять  $\Delta t = t_{\text{сф}}$ .

Итоговый криволинейный интеграл вдоль оптимальной траектории

$$I \approx \sum_{i=0}^{i_{\text{end}}-1} \sum_{n=0}^3 I_{ni} + \sum_{n=0}^3 I_i(t_{\text{сф}}), \quad (73)$$

где  $i_{\text{end}}$  – номер предпоследней точки траектории, лежащей еще внутри сферы,  $i_{\text{end}}$  определяется из условия (50). Второе слагаемое в (73) рассчитывается для интегралов при уменьшенном времени движения  $t_{\text{сф}}$  от предпоследней точки  $r_{i_{\text{end}}}$  до заданной конечной  $r_{\text{end}}$ .

### Результаты моделирования поиска оптимальной траектории методом пристрелки

В качестве тестовой функции затрат была задана нетривиальная функция пяти переменных, составленная по типу квадратической формы, которая (функция), однако, является формой 4-й степени:

$$F(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}^2, \mathbf{C} \mathbf{r}^2 \rangle + F_{\text{const}}, \quad (74)$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1,567 & 0,501 & 0,432 & 0,324 & 0,179 \\ 0,501 & 1,932 & 0,179 & 0,218 & 0,091 \\ 0,432 & 0,179 & 2,147 & 0,107 & 0,215 \\ 0,324 & 0,218 & 0,107 & 2,254 & 0,137 \\ 0,179 & 0,091 & 0,215 & 0,137 & 2,702 \end{bmatrix}$$

– матрица формы 4-й степени аргументов;

$$\mathbf{r}^2 \equiv \left[ (x_1 - x_{1ц})^2, (x_2 - x_{2ц})^2, \dots, (x_5 - x_{5ц})^2 \right]^T$$

— вектор квадратических отклонений от центра осевой симметрии функции;

$$\mathbf{r}_{\text{ц}} \equiv [x_{1\text{ц}}, x_{2\text{ц}}, x_{3\text{ц}}, x_{4\text{ц}}, x_{5\text{ц}}]^T = [8,562 \ 8,321 \ 8,678 \ 8,324 \ 8,879]^T$$

— вектор смещения центра осевой симметрии функции,  $F_{\text{const}} = 1000$  — постоянная составляющая функции. Эта составляющая задана для положительной определенности тестовой функции и соответственно для устойчивости численных методов в окрестности, близкой к центру  $\mathbf{r}_{\text{ц}}$ .

Начальная и конечная точки задавались соответственно так:

$$\mathbf{r}_{\text{beg}} = [0,000 \ 0,567 \ 0,268 \ 0,345 \ 0,191]^T,$$

$$\mathbf{r}_{\text{end}} = [1,621 \ 1,235 \ 1,339 \ 1,976 \ 1,752]^T.$$

В табл. 1 приводятся относительные минимальные значения криволинейного интеграла  $I_{\text{м.о}}$  вдоль траекторий, найденные методом пристрелки при увеличении элементарного шага  $\Delta\tau$  с  $2^{-11}$  до  $2^{-1}$  при количестве циклов пристрелки 48.

Количество итераций для определения времени пересечения конечной сферы, отсчитываемого от предпоследней точки траектории  $t_{\text{сф}}$ , было выбрано равным 16.

При  $\Delta\tau = 2^{-11}$  получается минимальное значение  $I_{\text{м.а}} = 44 \ 284,808$ , которое и принимается за абсолютный минимум (при еще меньших значениях  $\Delta\tau$  уже сказываются погрешности вычислений, которые искажают истинную картину). Относительные превышения абсолютного минимума

$$\delta I_{\text{м.о}} = I_{\text{м.о}}^{-1} (I_{\text{м.о}} - I_{\text{м.а}}) \cdot 100\%.$$

Отношение относительных превышений минимума при уменьшении шага  $\Delta\tau$  [в единицах «количество раз»]  $k = [\delta I_{\text{м.о}}(\Delta\tau_{n+1})]^{-1} \delta I_{\text{м.о}}(\Delta\tau_n)$ .

Так, например, число 2,07 в 6-й строке табл. 1 следует понимать так: при увеличении элементарного шага с  $2^{-7} = 1/128$  до  $2^{-6} = 1/64$  относительное превышение увеличивается в  $k = 0,352/0,170 = 2,07$  раз. Из 4-й колонки видно, что чем меньше элементарный шаг, тем точнее траектория приближается к минимальному значению интеграла, что и должно быть при правильной работе алгоритма. При увеличении элементарного шага в два раза относительные превышения увеличиваются также примерно в два раза. То есть превышение абсолютного минимума почти линейно зависит от элементарного шага, из чего следует, что порядки малости учитываемых и отбрасываемых величин во всех предшествующих выводах вполне согласованы.

Здесь автор не рассматривает неоднозначные решения задачи оптимальных траекторий методом

■ Таблица 1

$\Delta\tau$	$I_{\text{м.о}}$	$\delta I_{\text{м.о}}, \%$	$k$ , раз
$2^{-11}$	44284,808	—	—
$2^{-10}$	44284,834	0,011	—
$2^{-9}$	44294,887	0,034	3,09
$2^{-8}$	44314,981	0,079	2,32
$2^{-7}$	44355,135	0,170	2,15
$2^{-6}$	44435,579	0,352	2,07
$2^{-5}$	44596,732	0,716	2,03
$2^{-4}$	44920,129	1,446	2,02
$2^{-3}$	45554,171	2,878	1,99
$2^{-2}$	46788,159	5,665	1,97
$2^{-1}$	49118,901	10,930	1,93

пристрелки. Неоднозначность возникает, например, когда максимум функции потерь находится достаточно близко к прямой, соединяющей заданные начальную и конечную точки, и возможно попадание в конечную точку методом пристрелки двумя (или более) траекториями, проходящими по разные стороны от максимума. Также неоднозначность траекторий может быть при многоэкстремальных функциях. В этом случае следует задать некоторое упорядоченное множество начальных приближений векторов направления, например, с использованием многомерных сферических координат [5], и далее из полученных квазиоптимальных траекторий выбрать оптимальную.

### Проверка оптимальности траектории путем ее аппроксимации полиномами и поиска минимума криволинейного интеграла градиентным методом

Выше для построения оптимальной траектории был обобщен принцип минимума времени распространения света на многомерное пространство. Однако для подтверждения достоверности поставленную задачу необходимо также решить формальным, но строгим математическим методом без каких-либо допущений. Этот метод разработан только для тестирования метода пристрелки и не имеет самостоятельного значения, поэтому освещается более кратко, чем основной материал.

В качестве тестовой была задана функция (74). Траектория задавалась полиномами 8-й степени таким образом, что координаты  $X_2, X_3, X_4, X_5$  являются функциями координаты  $x_1$  — собственно аргумента  $X_i(x_1) = k_{i0} + k_{i1}x_1 + k_{i2}x_1^2 + \dots + k_{i8}x_1^8$ , где  $i = 2, 3, 4, 5$ .

Начальная точка

$$\mathbf{r}_{\text{beg}} = [0,000; \ 0,567; \ 0,268; \ 0,345; \ 0,191],$$

а конечная точка

$$r_{\text{end}} = 0,400000; 0,748993; 0,472549; \\ 0,563411; 0,418735.$$

При таком задании траектории 28 коэффициентов:  $k_{22} \div k_{28}, k_{32} \div k_{38}, k_{42} \div k_{48}, k_{52} \div k_{58}$  — свободно варьируются, а 4 коэффициента ( $k_{21}, k_{31}, k_{41}, k_{51}$ ) являются зависимыми от всех предыдущих коэффициентов и рассчитываются соответствующим образом так, что траектория всегда приходит в конечную точку. Криволинейный интеграл, рассчитанный вдоль траектории по несложным, но громоздким формулам, которые здесь не приводятся, минимизируется по тем же 28 коэффициентам градиентным методом. Прежде всего, проверим соответствие решений, получаемых методом пристрелки и градиентным методом непосредственной минимизации криволинейного интеграла. Для вышеприведенных данных вначале была построена траектория методом пристрелки и рассчитано минимальное значение криволинейного интеграла:  $I_{\text{м.а.}} = 10\,711,179\,548\,291\dots$ , которое и принимается за абсолютное или «истинное».

Далее в качестве начального приближения для градиентного метода было задано четыре девятки отсчетов по координатам

$$\{X_2(x_{1i}), X_3(x_{1i}), X_4(x_{1i}), X_5(x_{1i})\}, i = 0, 1, \dots, 8.$$

Эти отсчеты рассчитаны как точки пересечения траектории с девятью гиперплоскостями. Гиперплоскости через равные промежутки перпендикулярно пересекают ось аргументов

$$x_{1i} = 0,05i, i = 0, 1, \dots, 8.$$

Градиентный метод после 8 итераций выходит на квазиминимальное значение интеграла

$$I_{\text{к.м.}} = 10\,711,179\,583\,802\dots$$

В табл. 2 приводятся относительные отклонения текущего значения интеграла от «абсолютного» минимального значения.

Так, например, число 3,32 в 5-й колонке рассчитано так:

$$\delta I_{\text{отн}} = \frac{I_{\text{к.м.}} - I_{\text{м.а.}}}{I_{\text{м.а.}}} \cdot 100 \cdot 10^{-8} (\%) = \\ = 3,32 \cdot 10^{-8} (\%).$$

Из табл. 1 видно, что градиентный метод практически не отклоняется от минимального значения интеграла, найденного методом пристрелки.

■ Таблица 2

№ итерации	1	2	3	4	5
$\delta I_{\text{отн}} \cdot 10^{-8}, \%$	1,45	2,88	3,30	3,31	3,32

Незначительное относительное отклонение  $\delta I_{\text{отн}} = 3,32 \cdot 10^{-8} (\%)$  объясняется погрешностями вычислений. В табл. 3 приводятся относительные расхождения по координатам  $X_j(x_{1i})$ , где  $j = 1, 2, 3, 4$ ; в сечении гиперплоскостями  $x_{1i} = 0,05i$ , где  $i = 1, 2, \dots, 7$ , квазиоптимальной траектории (найденной градиентным методом) и оптимальной (построенной методом пристрелки). Начальные и конечные точки обеих траекторий не варьируются и всегда совпадают ( $i = 0$  и  $i = 8$ ). Для большей наглядности и критичности этих оценок из всех координат  $X_j(x_{1i})$  вычтены постоянная и линейная составляющие, т. е. сравнивались относительные разности координат дуговых сегментов траекторий

$$X_{j\text{отн}}(x_{1i}) = \frac{X_{j\text{kvaz}}(x_{1i}) - X_{j\text{opt}}(x_{1i})}{X_{j\text{opt}}(x_{1i})} \cdot 100\%,$$

где  $X_{j\text{kvaz}}(x_{1i})$  и  $X_{j\text{opt}}(x_{1i})$  — координаты дуговых сегментов квазиоптимальной и оптимальной траекторий соответственно.

Как упоминалось выше, в проверочном градиентном методе линейные составляющие выбираются так, что начало и конец траектории всегда проходят через заданные начальную и конечную точки. Из табл. 3 следует, что квазиоптимальная траектория, найденная градиентным методом, практически совпадает по своим координатам с оптимальной траекторией, найденной методом пристрелки.

Далее в качестве начального приближения для градиентного метода была задана прямая, соединяющая начальную и конечную точки траектории. Градиентный метод за 13 итераций от начального значения интеграла  $I = 10\,711,803\,155\,583\dots$  сошелся к квазиминимальному значению  $I_{\text{к.м.}} = 10\,711,183\,207\,083\dots$

В табл. 4 отражены эти итерации.

Во 2-й колонке записано итерационное уменьшение минимизируемого интеграла  $I$ , в 3-й колонке — абсолютное отклонение от квазиминимального значения  $\delta I_{\text{к.м.}}$ , в 4-й колонке — абсолютное отклонение от абсолютного минимального значения  $\delta I_{\text{м.а.}}$ .

■ Таблица 3

$x_{1i}$	$\delta X_{2\text{отн}}, \%$	$\delta X_{3\text{отн}}, \%$	$\delta X_{4\text{отн}}, \%$	$\delta X_{5\text{отн}}, \%$
0,05	-0,561	-0,053	0,440	0,675
0,10	-0,615	-0,081	0,422	0,674
0,15	-0,674	-0,110	0,402	0,671
0,20	-0,736	-0,142	0,380	0,668
0,25	-0,803	-0,176	0,356	0,665
0,30	-0,875	-0,214	0,329	0,660
3,50	-0,952	-0,254	0,300	0,655

■ Таблица 4

$j$	$I$ (дробная часть)	$\delta I_{к.м}$ (дробная часть)	$I_{м.а}$ (дробная часть)
0	,803155583	,619949	,623607
1	,212249541	,029042	,032701
2	,185817233	,002610	,006269
3	,184263480	,001056	,004715
4	,183971188	,000764	,004423
5	,183875095	,000668	,004327
6	,183835496	,000628	,004287
7	,183773571	,000566	,004225
8	,183653609	,000447	,004105
9	,183631619	,000425	,004083
10	,183607433	,000400	,004059
11	,183408103	,000201	,003860
12	,183267060	,000060	,003719
13	,183207083	,000000	,003659

Целая десятичная часть всех интегралов равна 10 711, а целые десятичные части величин  $\delta I_{к.м}$  и  $\delta I_{м.а}$  на всех итерациях равны нулю.

Из табл. 4 видно, что в начале итераций отклонения от квазиминимального значения и от абсолютного минимального значений практически равны. Затем градиентный метод имеет неустранимые ошибки, которые, однако, примерно в 150 раз меньше начальных отклонений. В итоге результаты проверки метода пристрелки тестовым методом сле-

дует признать вполне удовлетворительными. Еще раз подчеркнем, что тестовый метод не имеет самостоятельного значения и не рекомендуется к практическому использованию, так как сходится к минимуму лишь для малых длин траекторий, много меньших, чем для метода пристрелки. При больших длинах траекторий тестовый метод либо теряет устойчивость, либо сходится к локальным неоптимальным минимумам, и квазиоптимальная траектория получается извилистой.

### Возможные применения

Полученные результаты можно рекомендовать, например, для оптимизации управления систем в многомерном обобщенном пространстве состояний или параметров [8], где необходимо перевести систему из заданного начального состояния в заданное конечное с минимальными затратами, потерями и т. д. При этом системы могут быть не только технические но и, например, экономические и другие. Оптимальная траектория вышеописанным методом пристрелки получается в виде множества координат точек  $i = 0, 1, 2, \dots, i_{\text{end}}$ , которые разработчик или исследователь при необходимости может, например, аппроксимировать удобными для дальнейшего использования функциями. Кроме того, должна быть задана (или известна) функция потерь или затрат. Если эта функция не задана, то ее следует либо вывести аналитически, либо рассчитать численно, либо получить экспериментально. Далее найденное оптимальное движение системы в многомерном пространстве состояний следует пересчитать в программу управления (если это требуется). Однако все эти задачи уже выходят за рамки статьи и здесь не рассматриваются.

### Литература

1. Колесников Н. Е., Макаров К. А. Построение оптимальной траектории методом изохрон // *Фундаментальные проблемы естествознания и техники: Сб. тр. Междунар. конгресса.* СПб.: Изд-во СПбГУ, 2000. Т. 1. № 1. С. 168–169.
2. Балк М. Б., Болтянский В. Г. *Геометрия масс.* М.: Наука, 1987. 160 с.
3. Калиткин Н. Н. *Численные методы.* М.: Наука, 1978. 512 с.
4. Peter F., Swaszek, John B. Thomas. *Multidimensional Spherical Coordinates. Quantization* // *IEEE. Transaction of Information theory.* July 1983. Vol. It-29. N 4. P. 570–576.
5. Субочев С. Д. Применение многомерных сферических координат для численного интегрирования и некоторых других задач // *Информационно-управляющие системы.* 2005. № 3(16). С. 15–22.
6. Субочев С. Д. Построение оптимальных многомерных траекторий на основе физических моделей // *Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности: Сб. тр. 1-й Междунар. научно-практической конф.* СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2005. Т. 1. С. 85–86.
7. Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике.* М.: Наука, 1964. 847 с.
8. Гроздовский Г. Л., Иванов Ю. А., Токарев В. В. *Механика космического полета. Проблемы оптимизации.* М.: Наука, 1975. 536 с.

УДК 519.872

## РАСЧЕТ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ГРУППОВЫМ ПОСТУПЛЕНИЕМ ЗАЯВОК

**Ю. И. Рыжиков,**

доктор техн. наук, профессор

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского

*Предлагается способ расчета распределения времени ожидания заявок в одно- и  $n$ -канальной системе при простейшем потоке пачек заявок случайного объема с ограниченным размахом, а также распределения числа заявок в системе. Точность расчетов иллюстрируется сопоставлением с результатами имитационного моделирования.*

*A method is proposed to compute the number-in-the-system and waiting time distributions for a one- and multichannel queuing systems with a Poissonian flow of the random (finite volume) demands. The results are compared with imitation ones.*

### Введение

Работа многих систем обслуживания связана с обслуживанием неординарного потока заявок, поступающих пачками случайного, вообще говоря, объема. Такие ситуации порождаются прежде всего расщеплением первичных заявок, например при передаче данных в сетях с коммутацией пакетов, при заявках на комплекты изделий. Другими примерами могут служить прибытие групп пассажиров (семейных, экскурсионных, командированных) в пункт отправления, медицинская помощь жертвам катастроф и террористических актов, прорыв группой самолетов или ракет зоны ПВО и т. п.

Групповое поступление заявок существенно ухудшает показатели системы в сравнении с ординарным потоком той же средней интенсивности. Для оценки работы системы и последующего принятия организационных мер (управления потоком, увеличения быстродействия обслуживающих устройств или их числа) необходимо уметь рассчитывать следующие распределения:

- времени ожидания начала обслуживания пачки;
- дополнительных задержек внутри пачки и средней задержки заявок пачки;
- задержки пачки в целом;
- числа заявок, находящихся в системе.

Поставленная задача уже довольно давно обсуждается в литературе [8–12, 14]. Однако:

- все эти результаты относятся только к *одноканальным* системам;

- как правило, они имеют частный характер [14], а в ряде случаев [11] ошибочны;

- верификация результатов и данные о численной реализации отсутствуют.

В данной статье последовательно рассматриваются подходы к расчету систем обслуживания групповых заявок, решающие упомянутые проблемы. Объем пачек предполагается ограниченным, а входящий поток пачек — простейшим.

### Имитационное моделирование обслуживания групповых заявок

Имитационное моделирование (ИМ) в рассматриваемых ситуациях в связи с отсутствием альтернативных (и даже просто апробированных) методов расчета является практически единственным способом получения эталонных результатов. В инструментальных системах ИМ, например в GPSS World [1, 4, 7], предусмотрены ситуации с расщеплением и последующей сборкой заявок, означающей окончание обслуживания пачки. Однако ответа на все поставленные вопросы любая система со встроенным интерпретатором не дает. В GPSS World нельзя, к примеру, непосредственно получить моменты распределения времени ожидания пачки порядка выше второго, распределение времени пребывания в системе в зависимости от номера заявки в пачке, распределение числа заявок в системе. Встроенный в упомянутую систему язык PLUS все же является усеченным подмножеством универсальных алгоритмических языков, ориентированных на численные приложения, и по

возможностям и удобству заметно уступает Фортрану (см. раздел по оценке GPSS World [4]). Методика и приемы построения имитационных моделей на Фортране обсуждались в работах [4, 5]. Для решения вышеперечисленных задач имитационная модель должна иметь следующую специфику.

- По прибытии заявки случайным образом (в соответствии с заданным распределением) формируется объем пачки. Соответственно определяются количества  $d$  — принимаемых в каналы заявок и  $l$  — направляемых в очередь. Для первых свободные каналы определяются в цикле просмотра моментов освобождения с выходом из него после выявления  $d$  каналов. Свободные каналы занимают, для них формируются моменты освобождения; идет подсчет количества принятых заявок.

- Для заявок, направляемых в очередь, определяется возможность их приема (очередь ограничена). Для всех принимаемых запоминается момент их прибытия. Кроме того, для головной заявки пачки в ее паспорте фиксируется объем пачки, а для последующих — ее номер в пачке. В случае приема на обслуживание хотя бы одной заявки пачки в паспортах остальных запоминается время начала обслуживания пачки.

- При завершении обслуживания и наличии заявок в очереди прежде всего выясняется статус головной заявки очереди. Если она — первая в своей пачке, то для остальных заявок пачки фиксируется момент начала ее обслуживания. Далее накапливаются степени истекшего времени ожидания. Если заявка — не первая, копятся степени дополнительной задержки по отношению к первой заявке пачки. Накопление идет отдельно по номерам заявок в пачке.

- Для построения распределения числа заявок в очереди фиксируются моменты его изменения, связанные с постановкой в очередь или началом обслуживания первой заявки пачки (последнее необходимо для расчета распределения ожидания начала обслуживания). Соответственно, имеется счетчик текущего числа пачек, и при его изменении к соответствующим накопительным ячейкам добавляется интервал неизменности.

- Время ожидания начала обслуживания пачки определяется как разность между временем выбора на обслуживание первой заявки пачки и моментом ее прибытия в систему. Суммирование интервалов и количества реализаций идет в отдельных (по номерам заявок в пачке) счетчиках, причем количество реализаций увеличивается и при немедленном приеме заявки на обслуживание.

Верификация модели проводилась сопоставлением результатов ее работы с полученным аналитическим расчетом системы  $M^X/G/1$  (см. далее).

### Распределение числа заявок, прибывших за время обслуживания

Рассмотрим пуассоновский поток пачек требований, каждая из которых имеет одно и то же рас-

пределение  $\{f_i\}$  числа заявок. Тогда распределение  $\{f_i^{n*}\}$  суммарного числа заявок в  $n$  пачках будет  $n$ -кратной сверткой распределения  $\{f_i^{1*}\} = \{f_i\}$ .

Для дальнейшего нам необходимы вероятности прибытия ровно  $i$  заявок за случайный интервал времени между смежными обслуживаниями, имеющий распределение  $B(t)$ :

$$h_i = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda t)^n}{n!} f_i^{n*} dB(t) = \sum_{n=0}^\infty f_i^{n*} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} dB(t). \quad (1)$$

Интегралы следует вычислить предварительно согласно рекомендациям разд. 3.6.3 работы [3], а свертки  $\{f_i\}$  (для конечного размаха) последовательно получать численно и выполнять подсуммирование отдельно для каждого  $i$ . Нужно иметь в виду происходящее на каждом шаге свертки удлинение массива вероятностей  $\{f_i^{n*}\}$ .

В табл. 1 приводится сопоставление расчета по вышеописанной схеме и моделирования (1 млн испытаний) числа заявок обобщенного пуассоновского потока.

Объем пачки предполагался равновероятным в диапазоне 1÷6, интервал времени — равномерно распределенным на интервале  $[0, 10]$ .

### Расчет одноканальной системы

Относительно стандартной системы  $M/G/1$  известно (см., например, работу [3]), что стационарные вероятности наличия в системе ровно  $k$  заявок вычисляются как

$$p_0 = 1 - \lambda b_1; \quad (2)$$

$$p_k = \left( p_{k-1} - p_0 q_{k-1} - \sum_{j=1}^{k-1} p_j q_{k-j} \right) / q_0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где  $b_1$  — среднее время обслуживания заявки, а

$$q_i = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} dB(t)$$

есть вероятность прибытия ровно  $i$  заявок за случайное время обслуживания с распределением  $B(t)$ . Преобразование Лапласа—Стилтьеса (ПЛС) распределения времени ожидания получается согласно известной формуле Полячека—Хинчина (ФПХ)

$$\omega(s) = \frac{p_0}{1 - \frac{\lambda}{s} [1 - \beta(s)]}, \quad (3)$$

где  $\beta(s)$  есть ПЛС от плотности  $B(t)$ .

■ Таблица 1. Обобщенный пуассоновский поток

<i>n</i>	Расчет	Модель	<i>n</i>	Расчет	Модель
0	.43143e+00	.43237e+00	20	.16770e-02	.17110e-02
1	.49974e-01	.49654e-01	21	.12536e-02	.12640e-02
2	.54396e-01	.53787e-01	22	.91291e-03	.88300e-03
3	.59148e-01	.59052e-01	23	.64986e-03	.67300e-03
4	.64250e-01	.64103e-01	24	.45644e-03	.50100e-03
5	.69724e-01	.69234e-01	25	.32116e-03	.32400e-03
6	.75594e-01	.75437e-01	26	.22857e-03	.24000e-03
7	.31910e-01	.32270e-01	27	.15886e-03	.18600e-03
8	.29800e-01	.30080e-01	28	.10808e-03	.12900e-03
9	.27174e-01	.27388e-01	29	.72346e-04	.91000e-04
10	.23976e-01	.24203e-01	30	.48001e-04	.55000e-04
11	.20146e-01	.20224e-01	31	.31759e-04	.46000e-04
12	.15622e-01	.15626e-01	32	.20907e-04	.30000e-04
13	.10335e-01	.10292e-01	33	.13506e-04	.19000e-04
14	.86349e-02	.86930e-02	34	.86336e-05	.12000e-04
15	.70107e-02	.68830e-02	35	.55360e-05	.80000e-05
16	.55038e-02	.53480e-02	36	.36252e-05	.60000e-05
17	.41612e-02	.40850e-02	37	.24694e-05	.30000e-05
18	.30353e-02	.29600e-02	38	.17744e-05	.10000e-05
19	.21854e-02	.21270e-02	39	.13579e-05	.00000e+00

Избавившись от знаменателя в правой части формулы (3), разложим входящие в нее преобразования Лапласа по степеням *s* и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в правой и левой частях. Из этих равенств следуют формула для первого момента распределения длительности ожидания пачки и рекуррентные формулы для высших моментов:

$$w_1 = \frac{\lambda b_2}{2(1-\lambda b_1)};$$

$$w_k = \frac{\lambda}{1-\lambda b_1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{k!}{j!(k+1-j)!} b_{k+1-j} w_j, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (4)$$

при этом  $w_0 = 1$ .

В одноканальной системе заявки пачки обслуживаются строго последовательно, а ПЛС времени обработки каждой выражается через ПЛС трудоемкости отдельной заявки  $\beta(s)$  формулой

$$\gamma(s) = \sum_{m=1}^M f_m [\beta(s)]^m = F(\beta(s)), \quad (5)$$

где  $F(\cdot)$  — производящая функция объема пачки. Моменты  $\{g_j\}$  этой трудоемкости можно получить многократным численным дифференцированием

таблицы  $\gamma(s)$  в окрестности нуля с последующей сменой знака у нечетных производных или численной сверткой в моментах на основе символического равенства  $c^k = (a + b)^k$  с переносом показателей степеней в индексы. Обе эти технологии при разумном выборе шага построения и длины таблицы дают практически совпадающие результаты и могут применяться при решении других задач. Тогда моменты распределения времени ожидания начала обслуживания пачки могут быть найдены по формулам (4) с заменой  $\{b_j\}$  на  $\{g_j\}$ . Вероятность свободного состояния системы здесь вычисляется как

$$p_0 = 1 - \lambda \bar{f} b_1, \quad (6)$$

где  $\bar{f}$  — средний объем пачки. Последующие вероятности распределения числа пачек вычисляются по формулам, аналогичным (2), с вычислением  $\{q_i\}$  для определяемого (5) распределения трудоемкости пачки.

Распределение суммарного количества заявок в системе с групповым потоком следует рассчитывать согласно системе (2) с заменой первой формулы на (6) и вероятностей  $\{q_i\}$  на вычисляемые согласно (1) вероятности  $\{h_i\}$ .

Приведем сравнительные результаты моделирования (1 млн пачек равновероятного объема от 1 до 6) и расчета системы с равномерной на [0, 10]

■ Таблица 2. Распределение числа пачек в очереди по  $M/G/1$

$j$	Расчет	Модель	$j$	Расчет	Модель
0	.40341e+00	.40224e+00	10	.85699e-02	.88636e-02
1	.16340e+00	.16312e+00	11	.61429e-02	.63665e-02
2	.12174e+00	.12099e+00	12	.44032e-02	.44870e-02
3	.88167e-01	.88313e-01	13	.31563e-02	.31766e-02
4	.63288e-01	.63167e-01	14	.22624e-02	.21522e-02
5	.45342e-01	.45830e-01	15	.16217e-02	.16070e-02
6	.32483e-01	.32488e-01	16	.11625e-02	.11304e-02
7	.23276e-01	.23682e-01	17	.83326e-03	.78494e-03
8	.16681e-01	.17140e-01	18	.59728e-03	.60351e-03
9	.11953e-01	.12123e-01	19	–	.50317e-03

■ Таблица 3. Моменты распределения ожидания для пачки

Способ расчета	Порядок момента		
	1	2	3
По ФПХ	.46594e+02	.51851e+04	.86156e+06
Через МФАСТ	.46594e+02	.51851e+04	.86156e+06
В модели	.46938e+02	.52437e+04	.86378e+06
В модели через МФАСТ	.46943e+02	.52475e+04	.86595e+06

длительностью обслуживания заявки для коэффициента загрузки 0,8 (табл. 2).

Кроме того, были получены моменты длительности ожидания для пачки (табл. 3).

Здесь ФПХ подразумевает расчет высших моментов по рекуррентным формулам (4), а МФАСТ — через факториальные моменты  $\{m_{[k]}\}$  длины очереди пачек согласно формуле Брюмелля [3]

$$w_k = m_{[k]} / \lambda^k.$$

■ Таблица 4. Распределение числа заявок в системе  $M^X/G/1$

$j$	Расчет	Модель	$j$	Расчет	Модель
0	.20025e+00	.19985e+00	21	.11847e-01	.11988e-01
1	.49231e-01	.49081e-01	22	.10809e-01	.10988e-01
2	.52554e-01	.52130e-01	23	.98625e-02	.99888e-02
3	.54630e-01	.54487e-01	24	.89987e-02	.91151e-02
4	.55031e-01	.54938e-01	25	.82106e-02	.83720e-02
5	.53278e-01	.52955e-01	26	.74914e-02	.76478e-02
6	.48852e-01	.48722e-01	27	.68353e-02	.69639e-02
7	.41197e-01	.41141e-01	28	.62366e-02	.63042e-02
8	.38521e-01	.38470e-01	29	.56904e-02	.57371e-02
9	.35595e-01	.35358e-01	30	.51920e-02	.52330e-02
10	.32594e-01	.32395e-01	31	.47372e-02	.47071e-02
11	.29685e-01	.29406e-01	32	.43223e-02	.43543e-02
12	.27006e-01	.26686e-01	33	.39438e-02	.39469e-02
13	.24627e-01	.24475e-01	34	.35984e-02	.36217e-02
14	.22507e-01	.22442e-01	35	.32832e-02	.33337e-02
15	.20541e-01	.20569e-01	36	.29956e-02	.30517e-02
16	.18737e-01	.18869e-01	37	.27333e-02	.28815e-02
17	.17093e-01	.17107e-01	38	.24939e-02	.26155e-02
18	.15595e-01	.15729e-01	39	.22755e-02	.24088e-02
19	.14231e-01	.14347e-01	40	.20762e-02	.22400e-02
20	.12985e-01	.13017e-01	41	.18944e-02	.20520e-02

Распределение числа заявок в системе (табл. 4), как отмечалось выше, можно получить по алгоритму для стандартной системы  $M/G/1$  после замены  $\{q_j\}$  на их аналоги для обобщенного пуассоновского потока из табл. 1.

Обращает на себя внимание вызванное группировкой заявок в пачки сильнейшее затягивание «хвостов» распределения.

Поскольку *дополнительная* задержка  $i$ -й заявки пачки имеет ПЛС  $\varphi_i(s) = \beta^{i-1}(s)$ , для пачки в целом ПЛС задержки

$$\varphi_e(s) = \sum_{m=1}^M f_m \beta^{m-1}(s).$$

Для средней задержки произвольной заявки пачки имеем

$$\bar{\varphi}(s) = \sum_{m=1}^M \frac{f_m}{m} \sum_{i=1}^m \beta^{i-1}(s) = \frac{1}{1-\beta(s)} \sum_{m=1}^M \frac{f_m}{m} [1 - \beta^m(s)].$$

Распределение полного времени пребывания заявки в системе получается сверткой распределений ожидания пачки, дополнительной задержки в пачке и чистой длительности обслуживания.

**Многоканальная система**

Прежде всего отметим, что наиболее удобным и универсальным методом расчета многоканальных систем с произвольным распределением обслуживания является аппроксимация последнего гиперэкспоненциальным  $H_2$ . Такая аппроксимация позволяет сохранить три момента исходного распределения, что можно считать необходимым и достаточным.

Ниже обсуждается модель с ординарным потоком заявок, на основе которой далее предлагается метод для «групповой» задачи.

**Диаграммы переходов и расчет  $M/H_2/n$**

Пусть вероятность того, что длительность обслуживания превышает  $t$  (она же ДФР — дополнительная функция распределения):

$$\bar{B}(t) = \sum_{i=1}^2 y_i e^{-\mu_i t}.$$

Тогда задачу можно рассматривать как процесс обслуживания заявок двух типов, причем тип заявки назначается с вероятностями  $\{y_i\}$  в момент выбора ее на обслуживание. Характеризуя состояние системы полным числом заявок в ней (номер яруса) и распределением обслуживаемых заявок по типам, получаем диаграммы переходов по прибытию заявок и завершению обслуживания — для трехканальной системы (рис. 1 и 2 соответственно).

На рис. 2 при  $j > n$  поток обслуживания заявок  $i$ -го типа равен  $q_i \mu_i$ , где  $q_i$  — содержимое  $i$ -й позиции кода микросостояния. При наличии очереди завершения обслуживания в зависимости от типа

выбранной из очереди заявки с вероятностями  $\{y_i\}$  приводит в одно из двух микросостояний вышележащего яруса.

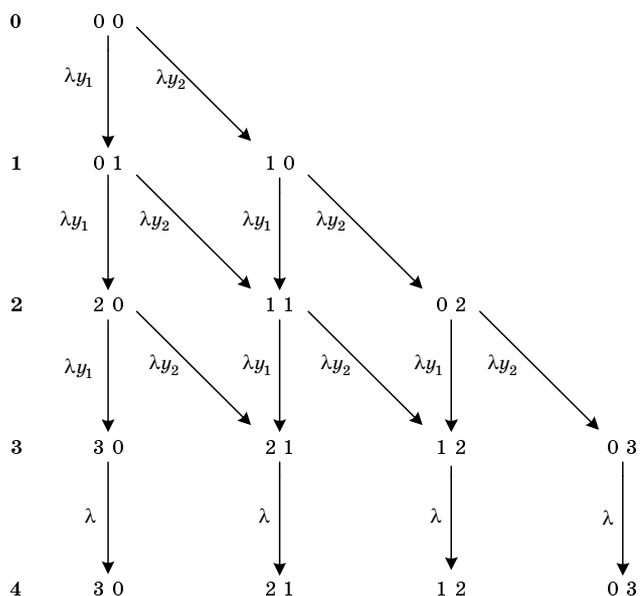
На основе диаграммы переходов могут быть получены матрицы интенсивностей переходов:

$A_j$  — с  $j$ -го яруса на  $(j+1)$ -й по прибытию заявки,

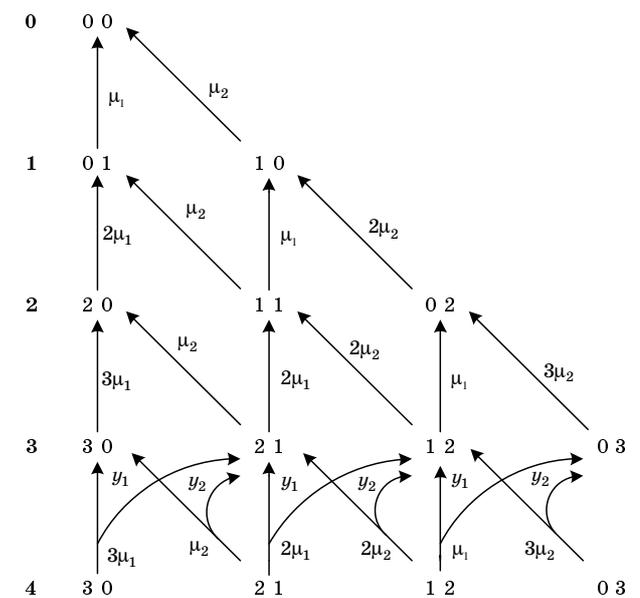
$B_j$  — с  $j$ -го на  $(j-1)$ -й по завершению обслуживания,

$D_j$  — ухода из микросостояний  $j$ -го яруса (диагональные).

В данной модели нет переходов в пределах одного яруса, так что фигурирующие в общем случае



■ Рис. 1. Переходы по прибытию заявки в системе  $M/H_2/3$



■ Рис. 2. Переходы по обслуживанию заявки в системе  $M/H_2/3$

[3] матрицы  $\{C_j\}$  здесь отсутствуют. Микросостояния яруса-источника соответствуют строкам, а яруса-приемника – столбцам матриц. Любой ненулевой элемент матрицы равен метке на представляющей переход стрелке. Элементы матриц  $\{B_j\}$  для четвертого и последующих ярусов получаются умножением исходной («корневой») интенсивности на  $y_j$ , соответствующий состоянию-приемнику. Поскольку для  $j \geq n$  матрицы  $A_j = \lambda I$ ,  $D_j = D_n$ , а для  $j \geq n + 1$   $B_j = B_{n+1}$ , запоминать нужно сравнительно небольшое число матриц.

С помощью этих матриц можно записать векторно-матричные уравнения баланса переходов между ярусами. Решение упомянутых уравнений можно получить методом матрично-геометрической прогрессии (см. [3]) или восходящим к Такахаши и Таками итерационным методом [2, 13]. Последний далее развивается нами применительно к потоку групповых заявок.

### Распределение количества пачек и моменты распределения ожидания

Распределение количества находящихся в системе  $M^X/H_2/n$  пачек заявок заманчиво рассчитывать аналогично одноканальному случаю, т. е. применяя  $H_2$ -аппроксимацию к распределению трудоемкости пачки. Далее моменты распределения ожидания пачки могут быть найдены по распределению числа пачек в очереди. Имитационные эксперименты подтвердили хорошее согласие полученных результатов с непосредственным определением ожидания головной заявки пачки.

Этот подход неявно предполагает, что все заявки каждой пачки последовательно обслуживаются в одном и том же канале. Тем самым исключается разделение пачки между несколькими каналами в недозгруженной системе и снижается реальная производительность последней. Можно предполагать, что возникающая погрешность будет возрастать при увеличении числа каналов и уменьшении номинального коэффициента загрузки системы:

$$\rho = \lambda \bar{f} b_1 / n. \quad (7)$$

Упомянувшиеся ожидаемые тенденции иллюстрируются сопоставлением результатов расчета (Р) и имитации (И) в табл. 5.

Таким образом, описанный подход вполне может найти практическое применение, но в ограниченном диапазоне условий.

### Дополнительные задержки в пачках

Эти задержки могут быть рассчитаны аналогично одноканальному случаю с заменой распределения времени на распределение интервалов между выбираемыми из очереди заявками. ДФР этого распределения можно [6, с. 253] аппроксимировать формулой

$$\bar{B}_n(t) = \left[ \bar{B}^*(t) \right]^{n-1} \bar{B}(t), \quad (8)$$

которая имеет прозрачный вероятностный смысл: для одного из каналов (только что завершившего обслуживание) берется полное распределение длительности обслуживания, а для прочих — помеченное звездочкой остаточное (случайная модификация полного).

Возможность применения формулы (8) была проверена на имитационной модели, предварительно откалиброванной по задаче с показательным распределением длительности обслуживания (в этом случае остаточное распределение совпадает с исходным и  $\bar{B}_n(t) = e^{-n\lambda t}$ ). Рабочее моделирование выполнялось для распределений длительности обслуживания Эрланга 3-го порядка ( $E_3$ ), коэффициент вариации  $v = 0,577$ , и гиперэкспоненциального  $H_2$ ,  $v = 1,36$ , при одинаковой средней длительности  $b_1 = 5$ . Результаты расчета моментов  $B_n(t)$  на основании формулы Саати (С) и посредством модели (М) представлены в табл. 6.

Анализ таблицы с учетом общеизвестного факта быстрого роста относительных погрешностей моделирования при увеличении порядка вычисляемых моментов указывает на допустимость практического использования формулы (8).

Еще одним вариантом описания потока обслуживаний в полностью загруженной системе является суммирование потоков от  $n$  каналов по методике, описанной в работе [3, разд. 3.6].

Наконец, для решения задачи можно воспользоваться распределением Вейбулла. Здесь ДФР имеет вид  $B(t) = \exp(-t^k/T)$ , а вероятность того, что обслуживание не завершится ни в одном из  $n$  каналов:

$$\bar{B}_n(t) = \exp(-nt^k/T), \quad (9)$$

т. е. описывается тем же распределением с заменой  $T$  на  $T/n$ . Подставляя это значение в формулы для моментов распределения Вейбулла, убеждаем-

■ Таблица 5. Моменты распределения ожидания пачек

Моменты	$\rho = 0,8$				$\rho = 0,6$			
	$n = 3$		$n = 5$		$n = 3$		$n = 5$	
	И	Р	И	Р	И	Р	И	Р
$w_1$	.145e+2	.128e+2	.787e+1	.667e+1	.477e+1	.362e+1	.244e+1	.149e+1
$w_2$	.550e+3	.483e+3	.170e+3	.152e+3	.838e+2	.674e+2	.265e+2	.173e+2
$w_3$	.307e+5	.268e+5	.531e+4	.510e+4	.217e+4	.180e+4	.428e+3	.284e+3

■ Таблица 6. Моменты интервалов между обслуживаниями в  $n$ -канальной системе

Тип $B(t)$	Порядок момента	Число каналов $n$					
		2		3		4	
		M	C	M	C	M	C
$E_3$	1	2.50	2.50	1.62	1.67	1.22	1.25
	2	9.48	9.46	4.28	4.46	2.50	2.60
	3	4.64e1	4.57e1	1.47e1	1.57e1	6.83	7.21
	4	2.75e2	2.64e2	6.08e1	6.66e1	2.30e1	2.45e1
	5	1.90e3	1.77e3	2.90e2	3.28e2	9.13e1	9.72e1
	6	1.49e4	1.36e4	1.55e3	1.83e3	4.20e2	4.36e2
$H_2$	1	2.62	2.45	1.68	1.59	1.27	1.16
	2	1.70e1	1.58e1	6.48	6.57	3.62	3.48
	3	2.05e2	1.75e2	4.36e1	4.54e1	1.75e1	1.74e1
	4	3.95e3	2.94e3	4.41e2	4.55e2	1.25e2	1.25e2
	5	1.09e5	6.94e4	5.88e3	6.18e3	1.17e3	1.19e3
	6	3.80e6	2.13e6	9.37e4	1.09e5	1.30e4	1.43e4

ся, что его моменты порядка  $m$  получаются делением исходных на  $n^m/k$ . Итак, здесь надлежит:

— найти параметры аппроксимации распределением Вейбулла остаточного распределения длительности обслуживания по двум моментам;

— вышеупомянутым пересчетом (с заменой  $n$  на  $n-1$ ) получить три момента распределения (9);

— аппроксимировать это распределение гиперэкспоненциальным;

— найти такую же аппроксимацию для исходного распределения;

— выполнить суммирование двух потоков с найденными распределениями интервалов между заявками.

**Распределение числа заявок в системе  $M^X/H_2/n$**

Запишем условия баланса для векторов-строк  $\{\gamma_j\}$  вероятностей микросостояний системы с учетом прибытия заявок пачками случайного объема не свыше  $M$ :

$$\gamma_j \mathbf{D}_j = \lambda \sum_{m=1}^{\widehat{M}} f_m \gamma_{j-m} \prod_{i=0}^{m-1} \mathbf{A}_{j-m+i} + \gamma_{j+1} \mathbf{B}_{j+1}. \quad (10)$$

Здесь все матрицы  $\{\mathbf{A}_j\}$  разделены на интенсивность  $\lambda$  потока пачек. Каждое слагаемое с множителем  $f_m$  соответствует пачке из  $m$  заявок, так что для попадания на  $j$ -й ярус исходный должен иметь номер  $j-m$ . Сомножители произведения с учетом вышеупомянутого деления имеют смысл вероятностей переходов по прибытии заявки между смежными ярусами, а все произведение — вероятности перехода между микросостояниями ярусов  $j-m$  и  $j$ . Предельный индекс суммирования

$\widehat{M} = \min\{j, M\}$ , так что для нулевого яруса правая часть (10) сводится к  $\gamma_1 \mathbf{B}_1$ .

Выразим векторы  $\{\gamma_j\}$  через векторы  $\{t_j\}$  условных вероятностей микросостояний яруса и суммарные вероятности  $\{p_j\}$  наличия в системе ровно  $j$  заявок:  $\gamma_j = p_j t_j$ , и введем отношения вероятностей смежных ярусов

$$z_j = p_{j-1} / p_j, \quad x_j = p_{j+1} / p_j. \quad (11)$$

Теперь уравнения (10) можно переписать в виде

$$t_j \mathbf{D}_j = \lambda \sum_{m=1}^{\widehat{M}} f_m t_{j-m} \left( \prod_{i=0}^{m-1} z_{j-i} \right) \left( \prod_{i=0}^{m-1} \mathbf{A}_{j-m+i} \right) + x_j t_{j+1} \mathbf{B}_{j+1}. \quad (12)$$

Таким образом:

$$t_j = z_j \beta'_j + x_j \beta''_j, \quad (13)$$

где

$$\beta'_j = \lambda \left[ \sum_{m=1}^{\widehat{M}} f_m t_{j-m}^{(k-1)} \left( \prod_{i=1}^{m-1} z_{j-i} \right) \left( \prod_{i=0}^{m-1} \mathbf{A}_{j-m+i} \right) \right] \mathbf{D}_j^{-1}; \quad (14)$$

$$\beta''_j = t_{j+1}^{(k)} \mathbf{B}_{j+1} \mathbf{D}_j^{-1}. \quad (15)$$

Верхними индексами (в скобках) указаны номера последовательных приближений, в каждом из которых делается прогонка по всем ярусам. Смысл перехода к векторам условных вероятностей в том, что только для них удастся задать хорошие начальные приближения, причем лишь для больших  $j$ . Последнее обстоятельство определяет и направление прогонки — от больших значений индексов  $j$  к нулю. Второе преимущество перехода

к условным векторам вероятностей — возможность замыкания расчетной схемы на основе допущения

$$\mathbf{t}_{j_{\max}}^{(k)} = \mathbf{t}_{j_{\max}-1}^{(k-1)}.$$

Переход к условным вероятностям связан с введением для каждого яруса дополнительных неизвестных  $\{x_j\}$  и  $\{z_j\}$ . Соответственно нужны дополнительные уравнения для их определения. В качестве первого выберем баланс переходов между  $j$ -м и  $(j+1)$ -м ярусами. Интенсивность переходов сверху должна учитывать  $\widehat{M} = \min\{M-1, j\}$  ярусов выше  $j$ -го; она составит

$$\begin{aligned} \Lambda_j &= \lambda \left[ p_j + p_{j-1}(1-f_1) + p_{j-2}(1-f_1-f_2) + \dots + p_{j-\widehat{M}+1} \left( 1 - \sum_{i=1}^{\widehat{M}-1} f_i \right) \right] = \\ &= p_j \lambda \left[ 1 + z_j \sum_{i=1}^{\widehat{M}} \left( 1 - \sum_{m=1}^i f_m \right) \left( \prod_{m=1}^{i-1} z_{j-m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Интенсивность переходов снизу есть  $p_{j+1} \mathbf{t}_{j+1}^{(k)} \mathbf{B}_{j+1} \mathbf{1}_j$ . Приравнявая эти количества и разделив обе части равенства на  $p_j$ , получаем уравнение

$$\lambda + \lambda z_j \left[ \sum_{i=1}^{\widehat{M}} \left( 1 - \sum_{m=1}^i f_m \right) \left( \prod_{m=1}^{i-1} z_{j-m} \right) \right] = x_j \mathbf{t}_{j+1}^{(k)} \mathbf{B}_{j+1} \mathbf{1}_j. \quad (16)$$

Второе дополнительное уравнение  $(z_j \beta'_j + x_j \beta''_j) \mathbf{1}_j = 1$  дает условие нормировки компонент  $\mathbf{t}_j$ . Из него следует, что

$$x_j = (1 - z_j \beta'_j \mathbf{1}_j) / (\beta''_j \mathbf{1}_j). \quad (17)$$

В этих формулах  $\mathbf{1}_j$  есть вектор-столбец из единиц с числом элементов, равным количеству микросостояний на  $j$ -м ярусе. Умножение на него справа соответствует подсчету суммы компонент левого сомножителя. Подставляя (17) в (16), убеждаемся, что

$$z_j = \frac{\mathbf{B}_{j+1} \mathbf{1}_j / (\beta''_j \mathbf{1}_j) - \lambda}{\lambda \left[ \sum_{i=1}^{\widehat{M}} \left( 1 - \sum_{m=1}^i f_m \right) \left( \prod_{m=1}^{i-1} z_{j-m} \right) \right] + \mathbf{B}_{j+1} \mathbf{1}_j (\beta'_j \mathbf{1}_j) / (\beta''_j \mathbf{1}_j)}. \quad (18)$$

Выведенные соотношения для  $j = j_{\max}, j_{\max}-1, \dots, 1$  применяются в следующей очередности:

- 1) получить  $\beta'_j$  и  $\beta''_j$  согласно (14) и (15);
- 2) найти  $z_j$  по формуле (18);
- 3) вычислить  $x_j$  согласно (17);
- 4) получить очередное приближение  $\mathbf{t}_j^{(k)}$  по формуле (13).

Поскольку на нулевом ярусе имеется всего одно микросостояние,  $\mathbf{t}_0 \equiv \mathbf{1}$  и в пересчете не нуждается.

### Начальные приближения

Для расчета начальных приближений воспользуемся установленной экспериментально стабилизацией векторов  $\{\mathbf{t}_j\}$  и отношений смежных вероятностей при  $j \rightarrow \infty$ . В ряде работ по теории очереди для предельного  $x$  предлагается формула

$$x = \rho^{2/(v_A^2 + v_B^2)}, \quad (19)$$

где  $\rho$  — коэффициент загрузки системы;  $v_A^2$  и  $v_B^2$  — квадраты коэффициентов вариации распределений интервалов между прибывающими заявками и длительности обслуживания соответственно. В нашем случае коэффициент загрузки вычисляется согласно (7), а интервалы между заявками для второй и последующих заявок пачки равны нулю. Таким образом, для простейшего потока пачек интенсивности  $\lambda$  и пачки объема  $m$  средний интервал между заявками

$$a_1(m) = \frac{1}{m} \frac{1}{\lambda} + \frac{m-1}{m} \cdot 0 = 1/(m\lambda),$$

а второй момент  $a_2(m) = 2/(m\lambda)^2$ . Подставляя в выражение для квадрата коэффициента вариации  $v_A^2 = a_2/a_1^2 - 1$  моменты интервалов между заявками, усредненные по распределению объема пачки, находим

$$v_A^2 = 2 / \left( \sum_{m=1}^M f_m / m \right) - 1. \quad (20)$$

Для определения предельного вектора  $\mathbf{t}$  воспользуемся отмеченной выше стабилизацией при  $j > n$  матриц интенсивностей переходов и самих векторов  $\{\mathbf{t}_j\}$ . Тогда индексы при векторах, матрицах,  $\{x_j\}$  и  $\{z_j\}$  можно опустить, а все матрицы  $\mathbf{A}$ , упоминаемые в уравнении (12), считать единичными и из рассмотрения исключить. Теперь уравнение (12) запишется в виде

$$\mathbf{tD} = \lambda \left( \sum_{m=1}^M f_m z^m \right) \mathbf{t} + x \mathbf{tB}, \quad (21)$$

где  $z = 1/x$ . Расписав это векторно-матричное уравнение покомпонентно и заменив одно из уравнений на условие нормировки компонент вектора  $\mathbf{t}$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений для начальных приближений к  $\{\mathbf{t}_j\}$ ,  $j = \overline{n, j_{\max}}$ . Для  $j = \overline{1, n-1}$  компоненты начальных векторов  $\{\mathbf{t}_j\}$  приходится принять равновероятными.

Начальные значения  $\{z_j\}$  для  $j > n$  следует считать как  $1/x$ , где  $x$  определяется согласно (19) с подстановкой  $v_A^2$  из (20). Начальные  $\{z_j\}$  для первых ярусов диаграммы можно получить с помощью соображений, использованных при выводе (16). Проводя горизонтальные разрезы между ярусами  $j$  и  $j-1$ , убеждаемся, что

$$p_j^{(0)} = \frac{\lambda}{\mu_j} \left[ p_{j-1} + (1-f_1)p_{j-2} + \dots + (1-f_1 - \dots - f_{M-1})p_{j-M+1} \right].$$

Набор учитываемых вероятностей для каждого разреза ограничивается требованием неотрицательности индексов. Усредненные интенсивности обслуживания  $\bar{\mu}_j = j/b_1$ . Вероятность  $p_0^{(0)}$  предполагается равной единице. Далее вычисляются начальные приближения к отношениям вероятностей

$$z_j^{(0)} = p_{j-1}^{(0)} / p_j^{(0)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

### Условие прекращения итераций

Итерации можно считать законченными, когда стабилизируются значения  $\{z_j\}$ , т. е. будет выполнено условие  $\max_j \{ |z_j^{(k)} - z_j^{(k-1)}| \} \leq \epsilon$ . Требования по точности естественно задать на уровне практически значимых вероятностей:  $\epsilon \approx 10^{-6}$ .

### Расчет итоговых вероятностей состояний

Условие баланса заявок для  $n$ -канальной системы в данном случае имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n-1} (n-j)p_j = n - \lambda \bar{f} b_1. \quad (22)$$

Очевиден вероятностный смысл условия: ожидаемое число свободных каналов равно недогрузке системы. Входящие в (22) вероятности последовательно выражаются через  $p_0$ :  $p_1 = p_0/z_1$ ,  $p_2 = p_1/z_2 = p_0/(z_1 z_2)$  и т. д. Следовательно:

$$p_0 \left[ n + \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) / \prod_{i=1}^j z_i \right] = n - \lambda \bar{f} b_1,$$

откуда и определяется  $p_0$ . Последующие вероятности  $p_j = p_{j-1}/z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots$ .

### Результаты расчета

Расчет по описанной методике выполнялся для трехканальной системы с равномерным на  $[0, 10]$  распределением обслуживания и равновероятным (от 1 до 6) объемом пачек заявок. Интенсивность потока пачек выбиралась для получения коэффи-

циента загрузки  $\rho = 0,8$ . Опорное отношение вероятностей  $z_\infty = 1/x_\infty$  составило 1,111. Для  $j_{\max} = 39$  стабилизация  $\{z_j\}$  (табл. 7) с точностью  $10^{-9}$  потребовала 44 итераций.

Дальнейшие  $\{z_j\}$  практически совпадают с  $z_{27}$ . Как видно, они очень близки к опорному. То же можно сказать и о предельных вероятностях условных микросостояний.

В табл. 8 расчетное распределение числа заявок в системе сопоставлено с результатами ИМ (10 млн испытаний).

Результаты согласуются очень хорошо. Отметим также, что сумма полученных вероятностей, дополненная суммой образующих геометрическую прогрессию неучтенных членов, с точностью  $10^{-7}$  совпала с единицей, причем условие нормировки полных вероятностей в расчетной схеме не использовалось. Это согласие является дополнительным подтверждением правильности расчетной схемы и ее программной реализации.

Имитационная модель допускала до 100 заявок в системе. Однако сходимость численного метода при увеличении  $j_{\max}$  заметно ухудшается. Поэтому целесообразно выполнять расчет при умеренных  $j_{\max}$ , а требуемое число дополнительных вероятностей вычислять по формуле  $p_j = p_{j-1}/z_{j_{\max}}$ .

### Распределение пачек и их задержек

Выше отмечалась необходимость расчета распределения числа «непочатых» пачек в очереди. Такая задача является обратной по отношению к естественному переходу от распределения числа пачек к распределению числа заявок и как таковая обладает вычислительной неустойчивостью. Это подтвердили попытки решения соответствующего уравнения в дискретных свертках несколькими разными методами. В связи с этим ниже предлагается хорошо зарекомендовавший себя полупырический метод.

Анализ результатов имитации показал, что отношение смежных вероятностей искомого распределения близко к интуитивно ожидаемому:  $Z = z_\infty^f$ . Полные пачки в очереди отсутствуют, если заявок в очереди нет или их количество не превышает среднего остатка пачки (скажем,  $k$  — поло-

■ Таблица 7. Расчетные отношения смежных вероятностей

$j$	$z_j$	$j$	$z_j$	$j$	$z_j$	$j$	$z_j$
0	.10000e+01	7	.11719e+01	14	.10929e+01	21	.10957e+01
1	.20589e+01	8	.10837e+01	15	.10940e+01	22	.10958e+01
2	.11822e+01	9	.10776e+01	16	.10952e+01	23	.10958e+01
3	.10695e+01	10	.10824e+01	17	.10958e+01	24	.10958e+01
4	.96669e+00	11	.10918e+01	18	.10958e+01	25	.10958e+01
5	.99908e+00	12	.10972e+01	19	.10956e+01	26	.10958e+01
6	.10468e+01	13	.10976e+01	20	.10956e+01	27	.10959e+01

■ Таблица 8. Распределения количества заявок в системе

<i>j</i>	Расчет	Имитация	<i>j</i>	Расчет	Имитация
0	.13692e+00	.13727e+00	20	.14154e-01	.14266e-01
1	.66499e-01	.65292e-01	21	.12917e-01	.13041e-01
2	.56251e-01	.58327e-01	22	.11788e-01	.11928e-01
3	.52598e-01	.52512e-01	23	.10757e-01	.10876e-01
4	.54410e-01	.54403e-01	24	.98164e-02	.98637e-02
5	.54460e-01	.54402e-01	25	.89579e-02	.90459e-02
6	.52027e-01	.51411e-01	26	.81745e-02	.82060e-02
7	.44397e-01	.44084e-01	27	.74594e-02	.74814e-02
8	.40967e-01	.40911e-01	28	.68069e-02	.67880e-02
9	.38016e-01	.37984e-01	29	.62115e-02	.61825e-02
10	.35122e-01	.35059e-01	30	.56681e-02	.56444e-02
11	.32169e-01	.32082e-01	31	.51723e-02	.51133e-02
12	.29320e-01	.29277e-01	32	.47198e-02	.46397e-02
13	.26713e-01	.26761e-01	33	.43070e-02	.42310e-02
14	.24442e-01	.24510e-01	34	.39302e-02	.38639e-02
15	.22341e-01	.22394e-01	35	.35864e-02	.35175e-02
16	.20400e-01	.20592e-01	36	.32726e-02	.32098e-02
17	.18617e-01	.18672e-01	37	.29864e-02	.29245e-02
18	.16990e-01	.17102e-01	38	.27251e-02	.26566e-02
19	.15507e-01	.15581e-01	39	.24867e-02	.24467e-02

вины ее среднего значения). Тогда можно считать, что вероятность этого события

$$q_0 = \sum_{i=0}^{n+\bar{k}} p_i,$$

а остальные вероятности образуют убывающую геометрическую прогрессию с начальным членом

$q_1$  и знаменателем  $Z$ . Замыкающую схему недостающую вероятность находим из условия нормировки:  $q_1 = (1 - 1/Z)(1 - q_0)$ .

В табл. 9 проводится сопоставление результатов расчета с имитацией.

Имея распределение числа непечатых пачек в очереди, можно по формуле Брюмелля выразить

■ Таблица 9. Распределения количества пачек в очереди

<i>j</i>	Расчет	Имитация	<i>j</i>	Расчет	Имитация
0	.47316e+00	.45458e+00	15	.16276e-02	.14718e-02
1	.14443e+00	.15136e+00	16	.11814e-02	.10227e-02
2	.10484e+00	.11139e+00	17	.85751e-03	.71961e-03
3	.76095e-01	.80331e-01	18	.62243e-03	.51405e-03
4	.55234e-01	.57622e-01	19	.45179e-03	.37014e-03
5	.40092e-01	.41471e-01	20	.32793e-03	.25248e-03
6	.29101e-01	.29731e-01	21	.23803e-03	.16101e-03
7	.21123e-01	.20981e-01	22	.17278e-03	.12383e-03
8	.15332e-01	.14868e-01	23	.12541e-03	.98421e-04
9	.11129e-01	.10666e-01	24	.91029e-04	.68672e-04
10	.80779e-02	.76942e-02	25	.66074e-04	.50771e-04
11	.58634e-02	.55641e-02	26	.47960e-04	.33102e-04
12	.42559e-02	.39279e-02	27	.34812e-04	.19618e-04
13	.30892e-02	.28407e-02	28	.25268e-04	.13579e-04
14	.22423e-02	.20432e-02	29	.18341e-04	.68985e-05

■ Таблица 10. Моменты распределения ожидания пачек

Способ определения	$w_1$	$w_2$	$w_3$
Расчет	.14013e+02	.54106e+03	.31337e+05
Имитация непосредственно	.14079e+02	.51615e+03	.28040e+05
Имитация через MFACT	.14067e+02	.51369e+03	.27659e+05

моменты распределения времени ожидания начала обслуживания пачки (табл. 10).

### Заключение

Широкий круг практически важных систем обслуживания описывается математическими моделями с групповым потоком заявок. Предло-

женные расчетные зависимости впервые дают возможность получать основные вероятностные характеристики многоканальных систем. Имитационные эксперименты подтвердили достаточную точность расчета практически значимых вероятностей и моментов временных распределений.

### Литература

1. Кудрявцев Е. М. GPSS World. Основы имитационного моделирования различных систем. М.: ДМК Пресс, 2004. 320 с.
2. Рыжиков Ю. И., Хомоненко А. Д. Итеративный метод расчета многоканальных систем с произвольным распределением времени обслуживания // Проблемы управления и теории информации. 1980. № 3. С. 32–38.
3. Рыжиков Ю. И. Теория очередей и управление запасами. СПб.: Питер, 2001. 384 с.
4. Рыжиков Ю. И. Имитационное моделирование. Теория и технологии. СПб.: КОРОНА принт, 2004. 384 с.
5. Рыжиков Ю. И. Современный Фортран. СПб.: КОРОНА принт, 2004. 288 с.
6. Саати Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения: Пер. с англ. М.: Сов. радио, 1965. 510 с.
7. Томашевский В. Н., Жданова Е. Г. Имитационное моделирование в среде GPSS. М.: Бестселлер, 2003. 416 с.
8. Chaudry M. L., Gupta U. C., Agarwal M. Computational analysis of the distribution of demands number in the system  $M^X/G/1$  — an alternative approach // INFOR. 1992. Vol. 30. N 1. P. 30–43.
9. Krakowski M. Arrival and departure processes in queues — Pollaczek — Khintchine formulas for bulk arrivals and bounded systems // RFAIRO. 1974. Vol. 1. P. 45–56.
10. Loris-Teghem J. A. Modèles d'attente  $M/G/1$  et  $GI/M/1$  à arrivées et service en groupe. Berlin: Springer, 1969. 53 p.
11. Ommeren J. C. W., van. Simple approximation for the batch-size  $M^X/G/1$  queue // OR. 1990. Vol. 38. N 4. P. 678–685.
12. Sivasamy R. A bulk service queue with accessible and non-accessible batches // Opsearch. 1990. Vol. 27. N 1. P. 46–54.
13. Takahashi Y., Takami Y. A numerical method for the steady-state probabilities of a  $GI/G/c$  queuing system in a general class // J. of the Operat. res. soc. of Japan. 1976. Vol. 19. N 2. P. 147–157.
14. Wirth K. D. A remark on relations between batch delays and customer delays // J. of Information Processing and Cybernetics. 1985. Vol. 21. N 1/2. P. 65–67.

УДК 629.198.2

## ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ ОБ ОСТАТОЧНОМ РЕСУРСЕ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РИСК-АНАЛИЗА

**Г. Н. Мальцев,**

доктор техн. наук, профессор

**М. В. Цветков,**

адъюнкт

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского

*Рассмотрены вопросы назначения остаточного ресурса сложных технических систем, находящихся за пределами гарантийного срока эксплуатации, входящих в состав информационно-управляющих комплексов с использованием риск-анализа. Приведен алгоритм принятия решения о возможности дальнейшей эксплуатации сложной технической системы по результатам оценки ее остаточного ресурса с использованием риск-анализа.*

*The determination of residual life of the technical systems is considered. Systems in question are supposed to be a part of information control system and with warranty period expired. The paper also describes an algorithm for making decisions about the possibility of prolonged exploitation of the system using the knowledge of the residual life as well as the risk analysis.*

Эксплуатация сложных технических систем, в том числе входящих в состав информационно-управляющих комплексов, в современных условиях часто связана с долгосрочным планированием их применения и принятием решений о возможности эксплуатации без проведения ремонтно-восстановительных работ в течение заданного срока службы. Для решения этих задач разрабатываются и используются методики назначения остаточного ресурса технических систем, позволяющие с той или иной точностью прогнозировать момент наступления их предельного состояния [1, 2].

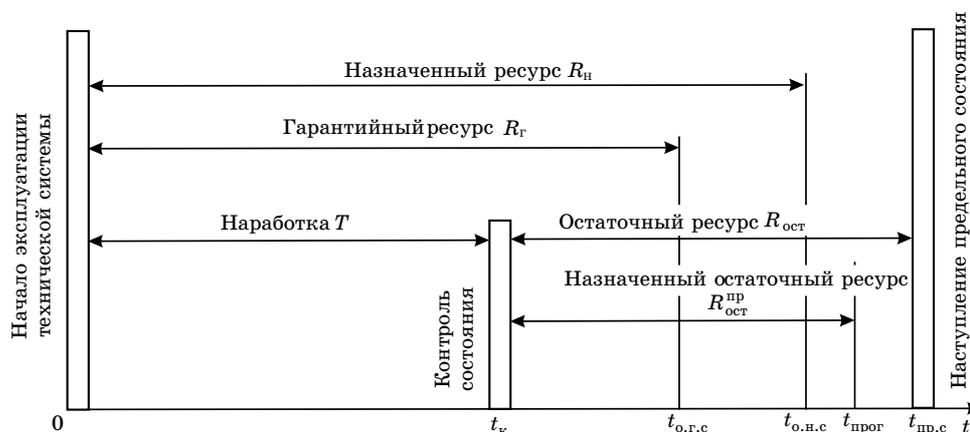
В практике эксплуатации сложных технических систем принято различать [1]:

- гарантийный ресурс  $R_r$  — суммарную наработку системы, в течение которой предприятие-изготовитель гарантирует ее работоспособное состояние;
- назначенный ресурс  $R_n$  — суммарную наработку системы, при достижении которой ее применение по назначению должно быть прекращено;
- остаточный ресурс  $R_{ост}$  — суммарную наработку системы от момента контроля технического состояния до перехода в предельное состояние.

На временной диаграмме, поясняющей виды ресурсов технических систем (рис. 1), обозначены:  $t = 0$  — момент времени, соответствующий началу эксплуатации технической системы;  $t_k$  — момент контроля технического состояния системы;  $t_{о.г.с}$  —

время окончания гарантийного срока эксплуатации системы;  $t_{о.н.с}$  — время окончания назначенного срока эксплуатации;  $t_{прог}$  — время, до которого производится эксплуатация технической системы;  $t_{пр.с}$  — время наступления предельного состояния, которое зависит от множества факторов, связанных с техническим состоянием и условиями эксплуатации системы, и является случайной величиной. Случайный характер наступления предельного состояния приводит к необходимости назначения остаточного ресурса  $R_{ост}^{пр}$ , исходя из которого в соответствии с принятыми методиками планируется дальнейшая эксплуатация системы.

Для технических систем с длительными сроками эксплуатации, находящихся за пределом гарантийного срока эксплуатации, наиболее важным является оценка остаточного ресурса системы  $R_{ост}$  и определение назначенного остаточного ресурса  $R_{ост}^{пр}$ . При этом необходимость разработки методик назначения остаточного ресурса технических систем обусловлена, в первую очередь, экономическими факторами. Экономический выигрыш состоит в прибыли, получаемой от эксплуатации системы, работающей за пределами гарантийного срока, но в пределах назначенного ресурса  $R_{ост}^{пр}$ , который не превышает (в идеальной ситуации — совпадает) с остаточным ресурсом  $R_{ост}$  рассматриваемой технической системы.



■ Рис. 1. Временная диаграмма, описывающая процесс эксплуатации технической системы с точки зрения расхода технического ресурса

Новым подходом к управлению эксплуатацией сложных технических систем является использование методов риск-анализа [2, 3]. Понятие риска в настоящее время широко используется в различных сферах человеческой деятельности [4]. В общем случае под риском  $W$  в некоторой сфере деятельности понимают стоимостное выражение вероятностного события, ведущего к ущербу:

$$W = \sum_{i=1}^N P_i C_i, \quad (1)$$

где  $N$  — общее количество неблагоприятных событий, ведущих к ущербу;  $P_i$  — вероятность возникновения  $i$ -го неблагоприятного события за некоторый промежуток времени;  $C_i$  — ущерб от возникновения  $i$ -го неблагоприятного события, выраженный в относительных или абсолютных единицах,  $i = 1, \dots, N$ .

В силу случайного характера возникновения отказов и выхода из строя аппаратуры принятие решения об остаточном ресурсе технической системы в принципе носит рискованный характер, а понятие риска связано с правильностью решения о возможности дальнейшей эксплуатации системы в течение определенного промежутка времени. В роли субъекта риска выступает лицо, принимающее решение (ЛПР) о назначении остаточного ресурса системы и о возможности ее применения в течение интервала времени от  $t_k$  до  $t_{\text{прог}}$ . При этом неправильная прогнозная оценка остаточного ресурса технической системы является причиной неправильного принятия решения о ее дальнейшем применении, а рассматриваемый риск ЛПР является частным случаем управленческого риска, с которым связывается принятие решений, приводящих к наступлению событий с нежелательными последствиями при управлении различными организационно-техническими системами [3, 4].

Применительно к задаче оценки риска неправильного назначения остаточного ресурса сложной

технической системы нежелательные последствия связаны с одним событием — ошибкой назначения остаточного ресурса  $R_{\text{ост}}^{\text{np}}$ , которая характеризуется величиной

$$\Delta R = |R_{\text{ост}} - R_{\text{ост}}^{\text{np}}|. \quad (2)$$

При таком подходе к определению риска  $i = 1$ , и величины, определяющие риск неправильного принятия решения об остаточном ресурсе системы, являются функцией  $\Delta R$ :  $P(\Delta R)$ ,  $C(\Delta R)$ ,  $W(\Delta R)$ .

В предельном случае с точки зрения возможных нежелательных последствий управленческий риск должен быть сведен к нулю. Однако понимание того, что полностью избежать риска при управлении сложными техническими системами и процессами принципиально невозможно, приводит к формулировке принципа приемлемого риска [1, 4]. В соответствии с этим принципом в тех случаях, когда нежелательные последствия не носят катастрофического характера, требуется достижение такого уровня риска, который можно обеспечить в реальных условиях с учетом действующих ограничений, в том числе экономических. Иными словами, при определении приемлемого риска следует сопоставить возможный ущерб вследствие реализации решения, принятого с учетом риска, с затратами, направленными на снижение риска.

Риск непосредственно связан с функцией потерь, через которую выражается ущерб  $C$  от возникновения неблагоприятных событий. В нашем случае в качестве функции потерь следует рассматривать зависимость возможного ущерба в стоимостном выражении  $C_{\text{п}}$  при неверной прогнозной оценке назначенного ЛПР остаточного ресурса от величины  $\Delta R$ . Если объективной оценкой остаточного ресурса системы, соответствующей моменту достижения предельного состояния, является оценка  $R_{\text{ост}}^{\text{np}}$ , то функция потерь будет иметь минимальное значение при  $R_{\text{ост}} = R_{\text{ост}}^{\text{np}}$ , что соответствует  $\Delta R = 0$ , и возрастать при  $R_{\text{ост}}^{\text{np}} > R_{\text{ост}}$  и  $R_{\text{ост}}^{\text{np}} < R_{\text{ост}}$ ,

что соответствует  $\Delta R > 0$ . При  $R_{\text{ост}}^{\text{пп}} > R_{\text{ост}}$  имеет место резкое возрастание функции потерь, что связано с увеличением числа отказов при достижении системой предельного состояния, и, следовательно, с увеличением материальных затрат на поддержание системы в работоспособном состоянии. При  $R_{\text{ост}}^{\text{пп}} < R_{\text{ост}}$  функция потерь также возрастает, но в меньшей степени, что связано с неполным использованием ресурса системы и отказом от ее эксплуатации до достижения ею предельного состояния.

В качестве показателя применения остаточного ресурса будем использовать разность  $\Delta R$  между определенным по результатам контроля состояния остаточным ресурсом системы  $R_{\text{ост}}$  и наработкой до момента достижения предельного состояния  $R_{\text{ост}}^{\text{пп}}$  (2). Ввиду того, что наработка сложной технической системы до наступления предельного состояния  $R_{\text{ост}}^{\text{пп}}$  является непрерывной случайной величиной,  $\Delta R$  также является непрерывной случайной величиной. При этом ошибки являются следствием случайного характера момента наступления предельного состояния, и риск неправильной оценки  $R_{\text{ост}}$  будет количественно зависеть от вероятности ошибочного решения ЛППР при назначении им  $R_{\text{ост}}^{\text{пп}}$ .

Таким образом, под риском назначения остаточного ресурса технической системы понимается стоимостное выражение вероятностного события, ведущего к ущербу и состоящего в назначении остаточного ресурса, не соответствующего реальному. Случайный характер наступления события, связанного с неправильной оценкой остаточного ресурса системы, приводит к необходимости количественного определения среднего риска назначения остаточного ресурса:

$$W(\Delta R) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta R) C_{\text{п}}(\Delta R) d\Delta R, \quad (3)$$

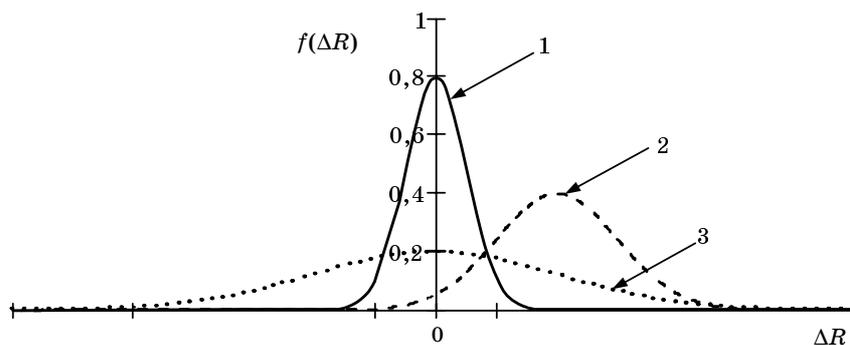
где  $f(\Delta R)$  — плотность распределения вероятности ошибки оценки остаточного ресурса системы  $\Delta R$ ;  $C_{\text{п}}(\Delta R)$  — функция объема экономических потерь, зависящая от  $\Delta R$ . Интегральное выражение

(3) соответствует общему выражению для риска принятия решения (1) при  $i = 1$  и осреднению экономических потерь  $C_{\text{п}}(\Delta R)$  по плотности распределения вероятности ошибки оценки остаточного ресурса системы  $\Delta R$ .

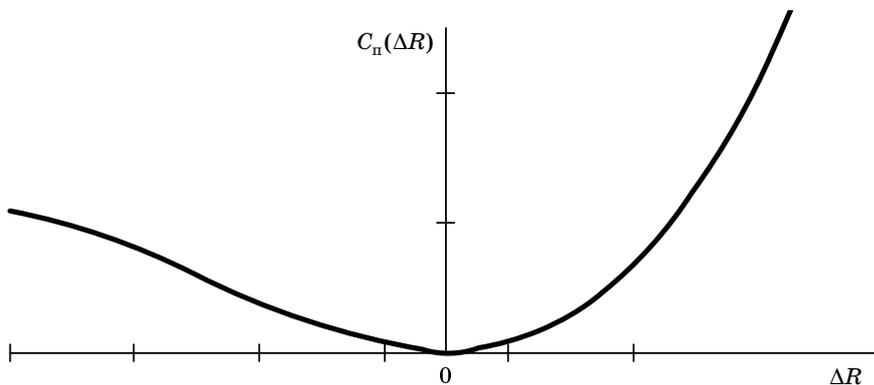
При решении задач теории надежности типовым является использование гауссовой статистики для случайных величин, описывающих изменение технического состояния технических систем [1]. Это относится, в частности, к радиоэлектронной, электротехнической и некоторым другим типам аппаратуры. Поэтому будем полагать, что плотность вероятности ошибки назначения остаточного ресурса системы  $f(\Delta R)$  имеет нормальный закон распределения с математическим ожиданием  $\mu_R$  и среднеквадратическим значением  $\sigma_R$ . Вид законов распределения  $f(\Delta R)$  при различных параметрах  $\mu_R$  и  $\sigma_R$  приведен на рис. 2. Кривая 1 соответствует  $\mu_R = 0$  и наименьшему значению  $\sigma_R$ , кривая 2 —  $\mu_R = 0$  и наибольшему  $\sigma_R$ , кривая 3 —  $\mu_R > 0$  и среднему значению  $\sigma_R$ .

На рис. 3 показан возможный вид функции потерь  $C_{\text{п}}(\Delta R)$ , резко возрастающей при  $\Delta R > 0$  и слабо возрастающей при  $\Delta R < 0$ . На рис. 4 показаны результаты определения среднего риска  $W(\Delta R)$  для трех законов распределения вероятности ошибки оценки остаточного ресурса системы  $f(\Delta R)$  при различных параметрах  $\mu_R$  и  $\sigma_R$  и функции потерь  $C_{\text{п}}(\Delta R)$  (см. рис. 2 и 3). На рис. 4 риск в каждом из рассматриваемых случаев равен площади под кривыми 1, 2 и 3 соответственно. Произведение функций  $f(\Delta R)$  и  $C_{\text{п}}(\Delta R)$  под знаком интеграла в выражении (3) соответствует взвешиванию функции потерь при назначении остаточного ресурса  $R_{\text{ост}}^{\text{пп}}$ .

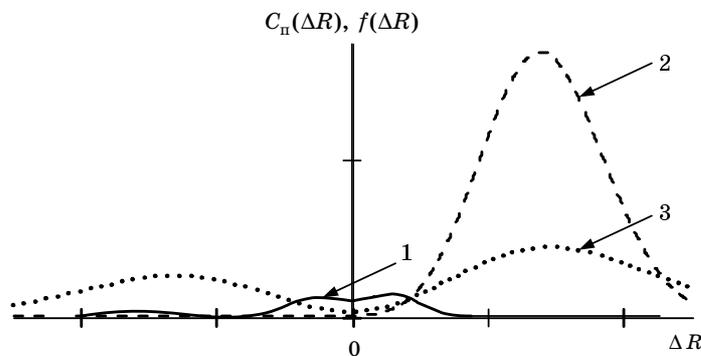
Очевидно, что в случае малой дисперсии плотности распределения ошибки  $f(\Delta R)$  и близком расположении назначенного и реального остаточного ресурса  $R_{\text{ост}} - R_{\text{ост}}^{\text{пп}} \cong 0$  область малых потерь функции  $C_{\text{п}}(\Delta R)$  будет компенсировать большую часть указанной плотности и риск определения назначенного ресурса будет минимален. При увеличении дисперсии плотности распределения ошибки остаточного ресурса, которая имеет место



■ Рис. 2. Плотности распределения случайной величины  $\Delta R$  при различных параметрах распределения  $\mu_R$  и  $\sigma_R$



■ *Рис. 3. Возможный вид функции потерь (расходов) при принятии решения о возможности эксплуатации технической системы*



■ *Рис. 4. Зависимости, характеризующие риск принятия решения в каждом из рассматриваемых случаев*

при недостаточной статистической выборке предельных состояний аналогичных систем, риск назначения остаточного ресурса возрастает. Наиболее неблагоприятным случаем является смещение плотности распределения ошибки назначения остаточного ресурса относительно области минимальных потерь, которое имеет место при несовпадении  $R_{ост}$  и  $R_{ост}^{пр}$  и  $\mu_R > 0$ .

Ключевым вопросом при оценивании риска назначения остаточного ресурса является определение функции потерь, которая отражает затраты на поддержание анализируемой технической системы в работоспособном состоянии в зависимости от ошибки реального и назначенного ресурса системы. Из-за сложности формализации, а также случайного характера наступления отказов системы в общем случае строгое математическое описание данной функции весьма затруднительно и не имеет точных аналитических зависимостей. Поэтому для определения функции потерь принято использовать экспертное оценивание. Известно несколько методов получения экспертных оценок, каждый из которых обладает своими преимуществами и недостатками [5]. Поэтому во многих случаях наибольший эффект дает комплексное применение нескольких видов экспертизы.

Наиболее простым, но наименее точным способом получения функции потерь является использование технической и эксплуатационной документации на систему, определяющей стоимость анализируемой системы и ее эксплуатации. Очевидный недостаток данного способа заключается в том, что он не позволяет учитывать случайность наступления предельного состояния системы и наступления отказов ее элементов и подсистем.

Вторым и более точным способом определения вида функции потерь является эмпирический метод, позволяющий построить на основе измерений эксплуатационных затрат требуемую зависимость. Для его реализации необходимо на основе обработки представительных статистических выборок оценок стоимости эксплуатации ряда однотипных систем построить требуемую зависимость. Данный способ применим в случае анализа серийных систем, по которым имеется статистика о затратах, и при возможности использования данных о функционировании подобных систем.

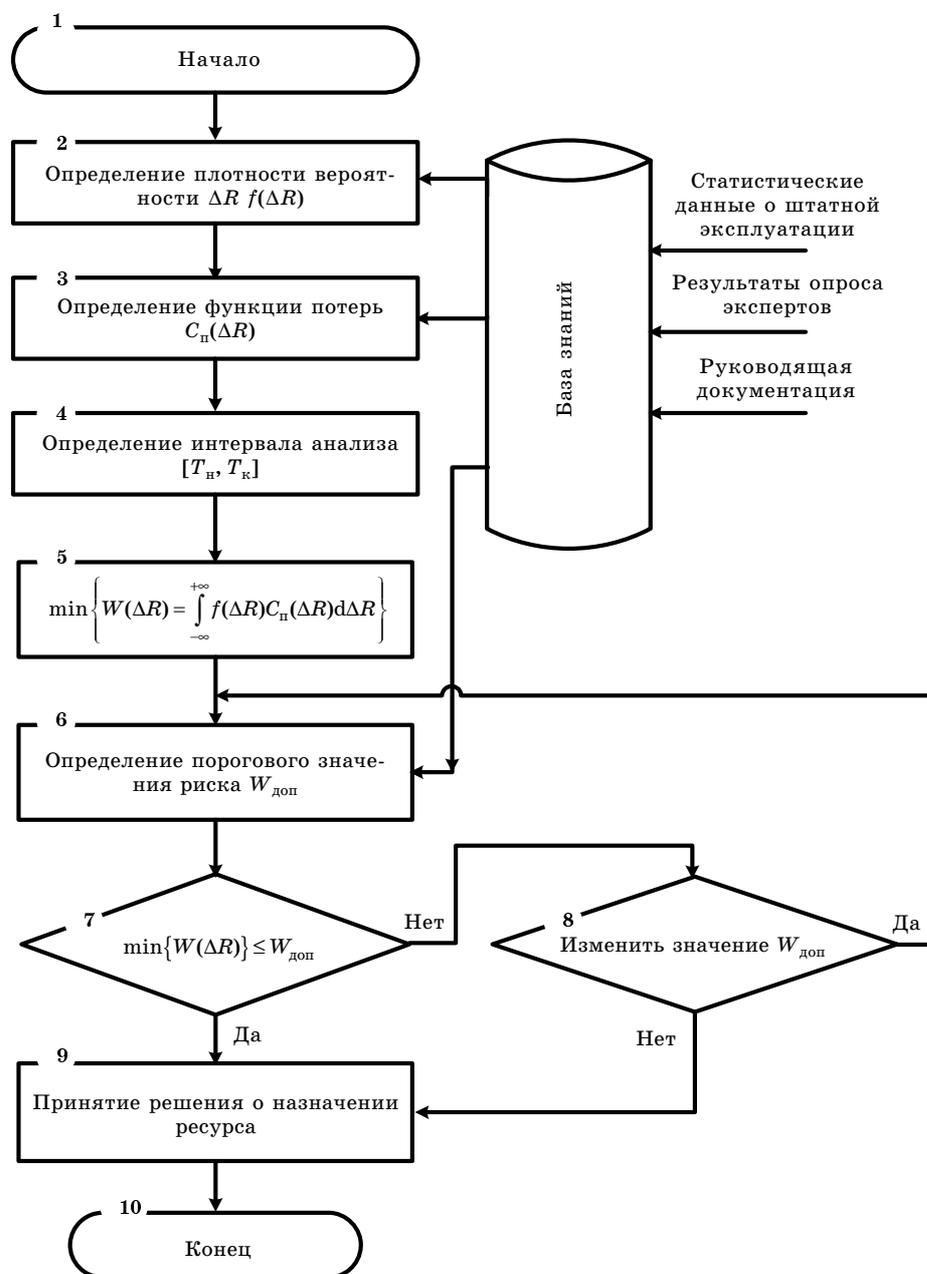
Третьим способом оценки вида функции потерь является метод экспертных оценок, сущность которого заключается в проведении экспертами интуитивно-логического анализа упущенной выгоды от списания системы, не выработавшей ресурс, и стоимости

эксплуатации системы после наступления ее предельного состояния с формальной обработкой результатов. Для решения требуемой задачи могут применяться разновидности метода экспертных оценок: анкетирование и интервьюирование, мозговой штурм, дискуссия, совещание, оперативная игра, сценарий.

Принцип приемлемого риска предполагает оценивание показателя риска и обоснование мер по его снижению до приемлемого уровня, который является допустимым в определенных условиях [4]. Эта концепция лежит в основе управления

риском, представляющего собой неотъемлемый этап подготовки и принятия решений, связанных с эксплуатацией системы, входящей в состав информационно-управляющей системы. Управление риском должно включать следующие этапы [4]:

- 1) анализ риска (определение источников угроз, оценивание значений его показателей);
- 2) обоснование допустимого значения риска;
- 3) выбор управляемых параметров, обеспечивающих это значение;
- 4) реализацию мер по снижению риска.



■ Рис. 5. Алгоритм принятия решения о возможности дальнейшей эксплуатации сложной технической системы с использованием риск-анализа

Рассмотренный подход к количественному определению среднего риска  $W(\Delta R)$  относится, прежде всего, к первым двум этапам управления риском для количественного определения величины потерь и планирования мер по снижению риска.

На рис. 5 приведен алгоритм принятия решения о возможности дальнейшей эксплуатации сложной технической системы по результатам оценки ее остаточного ресурса с использованием риск-анализа. Данный алгоритм требует задания в качестве исходных данных статистических данных о штатной эксплуатации этой системы и прототипов, а также экспертных оценок и предусматривает проведенный заранее этап предварительной обработки результатов наблюдения и опросов. В базе знаний содержатся в уже обработанном виде данные о штатной эксплуатации технической системы и аналогов, знания экспертов, а также требования руководящей документации. В блоках 2 и 3 производится определение количественных характеристик случайной величины — ошибки назначения остаточного ресурса технической системы, а также функции потерь  $C_{\text{п}}(\Delta R)$ . Для решения этих задач используется информация из базы знаний.

Определение интервала анализа в блоке 4 является самостоятельной задачей и требует формализованного подхода к ее решению. Одним из вариантов решения является принятие в качестве левой границы интервала времени начала прогно-

зирования, а в качестве правой границы — математического ожидания случайной величины — времени наступления предельного состояния. На интервале анализа в блоке 5 стандартным методом находится минимум значения риска, а затем в блоке 6 выполняется его сравнение с заданным (экспертами, руководящей документацией) максимально допустимым значением риска  $W_{\text{доп}}$ . Решение о возможности эксплуатации сложной технической системы принимается в блоке 7, исходя из результатов сравнения допустимого и полученных значений риска. В случае, если найденное минимальное значение риска превышает заданное одним из указанных способов значение  $W_{\text{доп}}$  и дальнейшее снижение  $W_{\text{доп}}$  недопустимо (блок 8), то в блоке 9 принимается решение о невозможности дальнейшей эксплуатации системы. Если же требования к уровню допустимого риска допускают возможность снижения  $W_{\text{доп}}$ , то осуществляется переход к блоку 6. Данная итерация повторяется до тех пор, пока в блоке 9 не будет принято решение о возможности или невозможности дальнейшей эксплуатации технической системы в течение  $R_{\text{ост}}^{\text{пр}}$ .

Рассматриваемый подход, основанный на риск-анализе принятия решения о возможности дальнейшей эксплуатации технической системы, позволяет повысить уровень обоснованности принимаемого решения ЛППР и может быть использован в методиках назначения остаточного ресурса.

## Литература

1. Половко А. М., Гуров С. В. Основы теории надежности. СПб.: БХВ-Петербург, 2006. 702 с.
2. Елохин А. Н. Анализ и управление риском: Теория и практика. М.: Полимедиа, 2002. 192 с.
3. Черкасов В. В. Проблемы риска в управленческой деятельности. М.: Рефл. бук, 1999. 288 с.
4. Соложенцев Е. Д. Сценарное логико-вероятностное управление риском в бизнесе и технике. СПб.: Бизнес-пресса, 2006. 544 с.
5. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д. А. Поспелова. М.: Наука, 1986. 311 с.

Посвящается 50-летию  
запуска первого искусственного спутника Земли  
и 95-летию ММПП «Салют»

## VI МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ «АВИАЦИЯ И КОСМОНАВТИКА-2007» 1–4 октября 2007 г.

Место проведения конференции: ДК Московского авиационного института  
Адрес: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., д. 4

Международная конференция «Авиация и космонавтика» проводится ежегодно при содействии Федерального космического агентства, Федерального агентства по промышленности, Федерального агентства по образованию, Российской академии наук, Российской академии космонавтики им. К. Э. Циолковского и Российской академии авиации и воздухоплавания. В 2006 году конференция проходила в рамках мероприятий, посвященных 60-летию Ракетно-космической корпорации «Энергия» и 95-летию со дня рождения академика М. К. Янгеля. В конференции участвовало более 200 российских и зарубежных предприятий, организаций и институтов. Во время конференции заслушано около 600 докладов, посвященных современным технологиям и новым возможностям в широком спектре аэрокосмической тематики, включающей в себя как прикладные, так и фундаментальные вопросы. Число участников конференции превысило 1200 человек. Конференция «Авиация и космонавтика» позволит полнее использовать научно-технический и производственно-технологический потенциал российских предприятий и их зарубежных коллег.

В 2006 году была впервые организована и проведена Международная интернет-конференция «Авиация и космонавтика».

### Направления работы конференции

Анализ и синтез сложных систем  
Аэродинамика  
Аэрокосмическое образование  
Баллистика, динамика и управление движением  
Безопасность полетов, летная годность воздушных судов, сертификация авиационной техники и авиационная безопасность  
Беспилотные летательные аппараты  
Бортовые радиоэлектронные комплексы  
Вертолетостроение  
Высокоточное позиционирование с помощью GNSS  
Динамика и прочность конструкций ЛА  
Интернет-технологии и средства виртуальной реальности в науке и образовании

Информационные технологии радиоэлектронных средств и их менеджмент  
Исследование и разработка университетских нано- и пикоспутников Земли  
История развития и сотрудничества отечественной и зарубежной авиации и космонавтики  
Компьютерный дизайн  
Компьютерные и информационные технологии на транспорте  
Конкурентоспособность российских фирм  
Материаловедение  
Наноматериалы и нанотехнологии  
Прикладные и математические методы  
Прогнозирование, экономика, конкурентоспособность авиационной техники  
Проектирование аэрогидрокосмических систем  
Проектирование, технологии и производство ракетно-космических аппаратов и систем  
Робототехнические системы  
Самолетостроение  
Системы жизнеобеспечения  
Системы управления движением, ориентации и навигации  
Тепловые двигательные установки  
Тепловые режимы, теплозащита, терморегулирование  
Технологическое обеспечение жизненного цикла машиностроительной продукции  
Управление качеством  
Управление эксплуатацией ракетно-космических систем  
Философское и социально-гуманитарное обоснование развития авиации и космонавтики  
Экология  
Экономика, коммерциализация и маркетинг  
Электроракетные двигатели и энергоустановки  
Электроэнергетические, электромеханические и биотехнические системы  
Студенческая и школьная секция

### Интернет-конференция

Заявки на участие только в интернет-конференции принимаются по электронной почте и при регистрации пользователя на официальном сайте.

На участников интернет-конференции с тезисами и полными текстами докладов распространяются требования для включения в сборник тезисов докладов Международной конференции «Авиация и космонавтика-2007».

Участники конференции «Авиация и космонавтика-2007», внесшие полный регистрационный взнос, автоматически являются участниками интернет-конференции.

#### Издание трудов конференции

Лучшие доклады будут рекомендованы для опубликования в журналах. Планируется издание сборника тезисов докладов. Оргкомитет не гарантирует включение докладов в сборник тезисов при оплате регистрационного взноса после 1 июля 2007 г.

#### Тезисы докладов и доклады

Участник конференции может быть контактным автором только одного доклада и соавтором нескольких других докладов. Тезисы докладов объемом одна страница должны быть подготовлены в редакторе Word, шрифт 14, Times New Roman, набраны через один интервал, без формул, математических символов, таблиц и рисунков. Сверху указывается название доклада, на следующей строке — инициалы и фамилии авторов (контактный автор должен быть подчеркнут), ниже — полное название организации, город и страна. Тезисы докладов должны быть представлены в Оргкомитет одновременно с заявкой на участие в конференции только по электронной почте (как два присоединенных файла) не позднее 1 июля 2007 г. Одновременно в адрес Оргкомитета по почте должен быть направлен распечатанный текст тезисов и экспертное заключение вместе с сопроводительным письмом. Тезисы, оформленные с нарушени-

ем правил, тезисы без заявок, а также факсы не рассматриваются. Участие в конференции без доклада возможно. В этом случае в Оргкомитет должна быть представлена только заявка. Оргкомитет проинформирует контактных авторов по электронной почте о получении тезисов, заявки и о включении в программу. **Внимание!** При отсутствии подтверждения (в связи с возможными сбоями в работе электронной почты) тезисы и заявку необходимо послать вторично.

Длительность выступлений — 10–15 минут. Докладчики могут пользоваться мультимедийным проектором.

#### Проживание

Участники конференции могут забронировать места в гостиницах через фирму АНДК (e-mail: info@andk.ru, k.ukhnova@russianhighteck.ru, телефоны: (495)-938-05-21, (495)-938-18-61/51, факс: (495)-938-10-11).

#### Контрольные сроки

Тезисы докладов должны быть представлены в Оргкомитет одновременно с заявкой на участие в конференции только по электронной почте (как два присоединенных файла) не позднее 1 июля 2007 г.

#### Дополнительная информация и справки

125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., д. 4, МАИ, Центр открытого образования, Ученому секретарю международной конференции «Авиация и космонавтика-2007» профессору Константину Анатольевичу Карпу

тел.: (495)195-94-83, 8-906-717-83-91

факс: (499) 158-29-77 (с пометкой — руководителю Центра открытого образования К. А. Карпу)

эл. почта: aviacosmos\_2007@mai.ru

сайт: www.mai.ru

**Российская академия наук**  
**Институт проблем передачи информации РАН**  
**Федеральное агентство по образованию**  
**Секция Института инженеров электротехники и электроники**  
**Северо-Западного федерального округа России**  
**Общество теории информации IEEE**  
**Комитет по науке и высшему образованию правительства Санкт-Петербурга**  
**Совет ректоров Санкт-Петербурга**  
**Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения**

**XI МЕЖДУНАРОДНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО ПРОБЛЕМЕ ИЗБЫТОЧНОСТИ В**  
**ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ**

2–6 июля 2007 г.  
 Санкт-Петербург

**Место проведения симпозиума: комфортабельный теплоход «Санкт-Петербург»**

В Советском Союзе, начиная с 1964 года, было проведено 10 симпозиумов по проблеме избыточности. Симпозиум охватывал широчайшую тематику исследования вопросов создания информационных систем. Последний такой симпозиум прошел в 1989 году. В сложное для науки и образования время 90-х годов симпозиум не проводился. Проблема оптимизации избыточности при проектировании информационных, коммуникационных, программных, технических и др. систем остается актуальной для развития современной техники.

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (ГУАП), бывший совместно с Академией наук организатором всех 10 симпозиумов по проблеме избыточности, предполагает возродить симпозиум с учетом изменившихся научно-технических и политических реалий. Предполагается провести XI симпозиум по проблеме избыточности в информационных системах 2–6 июля 2007 года в С.-Петербурге. Симпозиум будет иметь статус международного и организован под эгидой Министерства образования, Академии наук, Северо-Западной секции IEEE и Общества теории информации IEEE.

**Программный комитет**

Алексей Ашихмин (Белл лабс, США)  
 Александр Барг (Университет Мерилэнд, США)  
 Владимир Блиновский (Институт проблем передачи информации РАН, Москва)  
 Мартин Боссерт (Университет Ульма, Германия)  
 Мартин Гитзельс (Сименс, Германия)  
 Илья Думер (Университет Риверсайд Калифорнии, США)  
 Эрнст Габидулин (Московский физико-технический институт)  
 Григорий Кабатянский (Институт проблем передачи информации РАН, Москва)  
 Виктор Колесник (ГУАП, Санкт-Петербург)

Гарри Маркарян (Университет Лиддса, Великобритания)

Евгений Мирончиков (ГУАП, Санкт-Петербург)

Вячеслав Прелов (Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

Мигуэль Родригес (Университет Порто, Португалия)

Сергей Баландин (Нокия, Финляндия)

Сергей Семенов (Нокия, Финляндия)

Людо Толхайзен (Филипс, Голландия)

Виктор Зяблов (Институт проблем передачи информации РАН, Москва)

**Организационный комитет**

Евгений Крук (ГУАП, Санкт-Петербург) — председатель

Сергей Федоренко (ГУАП, Санкт-Петербург) — заместитель председателя

**Направления работы**

Вычислительные системы и сети  
 Системы и сети передачи данных  
 Методы защиты данных  
 Программные системы  
 Системы мультимедиа  
 Теория кодирования

**Официальный язык**

Английский

**Издание трудов**

Планируется издание сборника докладов.

**Тезисы докладов и доклады**

Отбор и рецензирование докладов будут проводиться на основе представленных авторами расширенных тезисов. Окончательная версия доклада ограничена пятью страницами. Инструкция для авторов размещена на сайте симпозиума: <http://k36.org/redundancy2007/>

**Контрольные сроки**

Тезисы и текст итогового доклада направлять в организационный комитет в электронном виде (в LaTeX) по адресу: [redundancy2007@vu.spb.ru](mailto:redundancy2007@vu.spb.ru)

1 мая — окончание приема расширенных тезисов

15 мая — извещение авторов о принятии докладов

1 июня — окончание приема версии доклада для печати

**Проживание**

Симпозиум проводится на борту теплохода, круиз начинается вечером 2 июля и заканчивается утром 6 июля. По желанию участников симпозиума оргкомитет может забронировать места в гостиницах Санкт-Петербурга на сроки до 2 июля и после 6 июля.

**Культурная программа**

Симпозиум проводится на борту комфортабельного теплохода «Санкт-Петербург», совершающе-

го круиз по рекам Нева и Свирь, озерам Ладога и Онега, которые являются жемчужиной Северо-Запада России. Участникам симпозиума будут предложены:

3 июля — пешеходная экскурсия по о. Валаам с посещением монастыря;

4 июля — пешеходная экскурсия по музею-заповеднику Кижи;

5 июля — автобусная экскурсия в Свято-Троицкий Александра Свирского мужской монастырь.

**Дополнительная информация и справки**

Организационный комитет симпозиума:  
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,  
190000, Санкт-Петербург, Большая Морская ул., 67

тел./факс. (+7-812) 494-70-52

сайт: <http://k36.org/redundancy2007/>

эл. почта: [redundancy2007@vu.spb.ru](mailto:redundancy2007@vu.spb.ru)

---

**ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ**

*Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.*

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail ([80x@mail.ru](mailto:80x@mail.ru)).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью — рецензию. Рукописи не возвращаются.

*Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.*

**ВОРОБЬЕВ**  
Станислав  
Николаевич



Доцент Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

В 1962 году окончил Ленинградский институт авиационного приборостроения.

В 1971 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Является автором более 50 научных публикаций.

Область научных интересов — моделирование систем и процессов.

**МАЛЬЦЕВ**  
Георгий  
Николаевич



Профессор, начальник кафедры космических радиотехнических систем Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского, заслуженный деятель науки Российской Федерации, действительный член Академии космонавтики им. К. Э. Циолковского.

В 1980 году окончил Ленинградский инженерный Краснознаменный институт им. А. Ф. Можайского.

В 1994 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук. Является автором более 200 научных публикаций.

Область научных интересов — обработка сигналов в радиотехнических и оптико-электронных информационных системах, космические радиотехнические комплексы управления, сбора и передачи информации.

**ОБУХОВА**  
Наталья  
Александровна



Доцент кафедры электронных и телевизионных систем Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

В 1991 году окончила Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина).

В 1996 году защитила диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Является автором более 30 научных публикаций.

Область научных интересов — системы и методы видеонаблюдения, обработка изображений с целью сегментации, сопровождения и классификации подвижных объектов.

**РЫЖИКОВ**  
Юрий  
Иванович



Профессор кафедры математического обеспечения ЭВМ Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского, заслуженный деятель науки РФ.

В 1958 году окончил Черноморское высшее военно-морское училище им. П. С. Нахимова. В 1969 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук.

Является автором более 200 научных публикаций, в том числе 40 учебных пособий и монографий.

Область научных интересов — теория очередей, имитационное моделирование, вычислительные методы и прикладное программирование, управление запасами, науковедение и педагогика высшей школы.

**СУБОЧЕВ**  
Сергей  
Дмитриевич



Ведущий программист кафедры информационно-сетевых технологий Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

В 1976 году окончил Ленинградский институт авиационного приборостроения по специальности «Автоматизированные системы управления».

В 1991 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Является автором 14 научных публикаций.

Область научных интересов — численные методы, геометрия и физические модели многомерных пространств для решения задач статистики, теории управления, оптимизации, математической физики и др.

**ТИХОНОВ**  
Эдуард  
Прокофьевич



Доцент кафедры биомедицинской электроники и охраны среды Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета, член-корреспондент Метрологической академии.

В 1962 году окончил Ленинградский институт авиационного приборостроения.

Является автором более 190 научных публикаций, в том числе более 50 авторских свидетельств и патентов на изобретения.

Область научных интересов — кибернетика, информатика, моделирование, информативно-измерительные системы, биомедицинская инженерия.

**ЦВЕТКОВ**  
**Михаил**  
**Владимирович**



Адъюнкт кафедры космических радиотехнических систем Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского. В 2001 году окончил Военный инженерно-космический университет им. А. Ф. Можайского. Является автором более 20 научных публикаций. Область научных интересов — эксплуатация сложных технических систем, теория надежности, нечеткое моделирование.

**ВЫСТАВОЧНЫЙ ПОРТАЛ EXPONET.RU  
 И КОМПАНИЯ ООО «ИНФОЦЕНТР»  
 представляют**

**XV МЕЖДУНАРОДНАЯ ВЫСТАВКА ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ,  
 ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, КОМПЬЮТЕРОВ И ОРГТЕХНИКИ,  
 ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ, СРЕДСТВ СВЯЗИ  
 И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ УСЛУГ В СФЕРЕ БИЗНЕСА  
 2–5 октября 2007 г.**

**Место проведения:**

Пермь, бульвар Гагарина, 65. Выставочный павильон «Пермская Ярмарка».

**Основные тематические разделы**

Информационные технологии и их приложения для бизнеса

Информатизация и компьютерные сети, оборудование для доступа в Интернет

Персональные компьютеры, серверы, модемы, ноутбуки

Интерактивные услуги в сетях подвижной связи, видеоконференцсвязь

Беспроводные системы и сетевые решения, сетевая связь

Телекоммуникационное оборудование — интегрированные решения

Системы управления сетями и защиты информации

Электронные базы данных, информационно-справочные системы

Электронная коммерция, аппаратно-программные платформы для коммерческой деятельности

Коммуникационные услуги на базе интеграции средств связи и информатизации

Услуги управленческого консалтинга и аудита, юридические услуги

Системы IP и компьютерной телефонии

Волоконно-оптическая техника связи  
 Оборудование спутникового и кабельного телевидения

Копировальное и множительное оборудование  
 Мультимедиа-технологии и оборудование для презентаций, WEB-дизайн

Специализированные отраслевые и офисные программные продукты

Специализированные издания, литература

**Деловая программа выставки**

- 21-й «Уральский Компьютерный Форум»;
- технический тур компании «INTEL»;
- презентация проектов Правительства Пермского края в сфере информационных технологий;
- презентация «Управление корпоративными бизнес-процессами»;
- 40 семинаров и конференций;
- количество посетителей-специалистов — более 2 тысяч человек.

Дополнительная информация  
 Директор выставки: Гайворонский Андрей Михайлович

Телефон: (342) 261-61-85

Факс: (342) 262-58-21

Сайт: <http://www.exponet.ru/exhibitions/by-id/internetpm/internetpm2007/index.ru.html>

УДК 519.2

Пересечение гауссова процесса с неслучайным уровнем

*Воробьев С. Н.* Информационно-управляющие системы, 2007. № 2. С. 2–11.

Функция и плотность распределения времени пересечения гауссовым процессом неслучайного уровня находятся с использованием двумерного нормального распределения. В устройствах измерения времени прихода импульсного сигнала с большой вероятностью пересечение заданного уровня оказывается единственным. Приводятся примеры расчета и моделирования плотности распределения времени первого пересечения.

Список лит.: 7 назв.

УДК 681.314+681.51.011

Аналитико-имитационное исследование и оптимизация алгоритмов аналого-цифрового преобразования в условиях воздействия помех (Часть 1)

*Тихонов Э. П.* Информационно-управляющие системы, 2007. № 2. С. 12–21.

На основании предложенных автором информационных алгоритмов проведен аналитико-имитационный анализ потенциальных возможностей адекватных алгоритмов аналого-цифрового преобразования поразрядного уравнивания, в том числе, при воздействии аддитивной помехи. На основе критерия помехоустойчивости разработаны рекомендации по оптимальному выбору параметров адекватных алгоритмов аналого-цифрового преобразования в зависимости от уровня аддитивной помехи.

Список лит.: 16 назв.

УДК 621.397.13

Предварительная классификация изображения в задачах сегментации объектов

*Обухова Н. А.* Информационно-управляющие системы, 2007. № 2. С. 22–28.

Рассматривается алгоритм предварительной классификации изображения с целью выделения областей, содержащих с высокой вероятностью объекты интереса. Классификация областей изображения выполняется по уровню высокочастотной энергии. Приведены результаты сравнительного анализа различных способов, подчеркивающих высокочастотные составляющие изображения, и выбран способ, обеспечивающий наиболее высокий уровень качества классификации. Подробно рассмотрена процедура пороговой обработки.

Список лит.: 7 назв.

UDK 519.2

The intersection of a Gaussian process by a nonrandom level

*Vorobiev S. N.* IUS, 2007. N 2. P. 2–11.

The distribution function and the density function of the crossing time for a Gaussian process at a nonrandom level is found with the help of two-dimensional normal distribution. In the systems of time measurement the moment of signal arrival with big probability of intersection turns out to be unique. Examples of estimation and simulation modeling of the first crossing time density function are considered.

Refs: 7 titles.

UDK 681.314+681.51.011

Analytical and imitating research and optimization of algorithms of analog-digital transformation in conditions of influence of noise (Part 1)

*Tikhonov E. P.* IUS, 2007. N 2. P. 12–21.

On the basis of the information algorithms proposed by the author, certain methods of analog-digital transformation are investigated in the presence of noise. The results of research allow us to receive recommendations as to an optimum choice of parameters of adequate algorithms of analog-digital transformation depending on noise.

Refs: 16 titles.

UDK 621.397.13

Preliminary image classification in the problems of object segmentation

*Obukhova N. A.* IUS, 2007. N 2. P. 22–28.

A method of preliminary image classification is considered. The aim of the analysis is to distinguish the areas containing, with high probability, the objects of interest. Image classification is carried out according to the level of high-frequency energy. The results of the comparative analysis for various methods emphasizing the high-frequency image components are given and the method providing the highest quality of classification is chosen. A threshold processing procedure is considered in detail.

Refs: 7 titles.

УДК 519.95

Построение оптимальных траекторий в многомерных пространствах на основе физических моделей

*Субочев С. Д.* Информационно-управляющие системы, 2007. № 2. С. 29–38.

Получено одинаковое выражение для радиуса малой дуги оптимальной траектории в двух физических моделях — движения точки с единичной скоростью и распространения луча света. Принцип минимального времени распространения света в трехмерном физическом пространстве обобщается и на многомерное пространство и используется для разработки соответствующего численного метода пристрелки при построении оптимальных многомерных траекторий. Оптимальность траекторий, найденных методом пристрелки, подтверждена формальным, но строгим математическим градиентным методом.

Список лит.: 8 назв.

УДК 519.872

Расчет систем обслуживания с групповым поступлением заявок

*Рыжиков Ю. И.* Информационно-управляющие системы, 2007. № 2. С. 39–49.

Предлагается способ расчета распределения времени ожидания заявок в одно- и  $n$ -канальной системе при простейшем потоке пачек заявок случайного объема с ограниченным размахом, а также распределения числа заявок в системе. Точность расчетов иллюстрируется сопоставлением с результатами имитационного моделирования.

Список лит.: 14 назв.

УДК 629.198.2

Принятие решения об остаточном ресурсе технической системы с использованием риск-анализа

*Мальцев Г. Н., Цветков М. В.* Информационно-управляющие системы, 2007. № 2. С. 50–55.

Рассмотрены вопросы назначения остаточного ресурса сложных технических систем, находящихся за пределами гарантийного срока эксплуатации, входящих в состав информационно-управляющих комплексов с использованием риск-анализа. Приведен алгоритм принятия решения о возможности дальнейшей эксплуатации сложной технической системы по результатам оценки ее остаточного ресурса с использованием риск-анализа.

Список лит.: 5 назв.

UDK 519.95

The construction of optimal trajectories in multidimensional spaces on the basis of physical models.

*Subochev S. D.* IUS, 2007. N 2. P. 29–38.

We derive an expression for the radius of a small arc of the optimal trajectory in two physical models: the motion of a point with unit velocity and the propagation of a light ray. The principle of minimal propagation time in three-dimensional physical space is generalised to high-dimensional space and is used for the elaboration of the corresponding digital method of fire adjustment in constructing the optimal high-dimensional trajectories. The optimality of the obtained trajectories is justified by a formal mathematical gradient method.

Refs: 8 titles.

UDK 519.872

Queueing systems with random batch arrivals

*Ryzhikov Yu. I.* IUS, 2007. N 2. P. 39–49.

A method is proposed to compute the number-in-the-system and waiting time distributions for a one- and multichannel queueing systems with a Poissonian flow of the random (finite volume) demands. The results are compared with imitation ones.

Refs: 14 titles.

UDK 629.198.2

Making decision about residual life of technical systems with risk analysis

*Maltsev G.N., Tsvetkov M.V.* IUS, 2007. N 2. P. 50–55.

The determination of residual life of the technical systems is considered. Systems in question are supposed to be a part of information control system and with warranty period expired. The paper also describes an algorithm for making decisions about the possibility of prolonged exploitation of the system using the knowledge of the residual life as well as the risk analysis.

Refs: 5 titles.

**Уважаемые авторы журнала  
«ИНФОРМАЦИОННО-УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ»!**

*Статьи проходят обязательное рецензирование и публикуются бесплатно.  
Мы будем рады сотрудничеству с Вами и надеемся, что Вы порекомендуете библиотеке  
Вашей организации подписаться на наш журнал.*

**При подготовке рукописей статей редакция просит Вас руководствоваться следующими рекомендациями.**

Объем статьи (текст, таблицы, иллюстрации и библиография) не должен превышать эквивалента в 16 страниц, напечатанных на бумаге формата А4 на одной стороне через 1,5 интервала в Word шрифтом Times New Roman размером 13.

Обязательными элементами оформления статьи являются: индекс УДК, заглавие, инициалы и фамилия автора (авторов), ученая степень, звание, полное название организации, аннотация (5–7 строк) на русском и английском языках.

Формулы набирайте в Word, при необходимости можно использовать формульный редактор; для набора одной формулы не используйте два редактора; при наборе формул в формульном редакторе знаки препинания, ограничивающие формулу, набирайте вместе с формулой; для установки размера шрифта никогда не пользуйтесь вкладкой Other..., используйте вкладку Define; в формулах не отделяйте пробелами знаки: + = –.

При наборе символов в тексте помните, что символы, обозначаемые латинскими буквами, набираются светлым курсивом, русскими и греческими — светлым прямым, векторы и матрицы — прямым полужирным шрифтом.

Иллюстрации в текст не заверстываются и предоставляются отдельными исходными файлами, поддающимися редактированию:

- рисунки, графики, диаграммы, блок-схемы изготавливаются в векторных программах: Visio 4, 5, 2002–2003 (\*.vsd); Coreldraw (\*.cdr); Excel; Word; AdobeIllustrator; AutoCad; Компас; Matlab (экспорт в формат \*.ai);

- фото и растровые — в формате \*.tif, \*.png с максимальным разрешением (не менее 300 pixels/inch).

Наличие подрисовочных подписей обязательно (желательно не повторяющих дословно комментарии к рисункам в тексте статьи).

В редакцию предоставляются:

- отпечатанный (формат А4) текст статьи, подписанный всеми авторами с указанием даты предоставления, и иллюстрации, пронумерованные с подрисовочными подписями (в двух экземплярах);

- полностью совпадающий с распечаткой текст в виде файла Microsoft Word (шрифт Times New Roman, тексты программ — Courier New) на дискетах 1,44 Мб или CD;

- аннотация (5–7 строк) на русском и английском языках;

- название статьи, фамилия, имя, отчество автора (ов) на английском языке;

- сведения об авторе (фамилия, имя, отчество, место работы, должность, ученое звание, учебное заведение и год его окончания, ученая степень и год защиты диссертации, область научных интересов, количество научных публикаций, домашний и служебный адреса и телефоны, факс, e-mail), контрастное, четкое фото авторов (можно в электронном виде — не менее 300 pixels/inch при размере 40×55 мм);

- экспертное заключение (при необходимости).

**Список литературы** составляется по порядку ссылок в тексте и оформляется следующим образом:

- для книг и сборников — фамилия и инициалы авторов, полное название книги (сборника), город, издательство, год, общее количество страниц;

- для журнальных статей — фамилия и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала, год издания, номер журнала, номера страниц;

- ссылки на иностранную литературу следует давать на языке оригинала без сокращений.

Адрес редакции:

190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67, ГУАП, РИЦ.

Редакция журнала «Информационно-управляющие системы».

Факс: (812) 494 70 18, тел.: (812) 494 70 36.

E-mail: [80x@mail.ru](mailto:80x@mail.ru), [ius@aanet.ru](mailto:ius@aanet.ru)

Сайт: [www.i-us.ru](http://www.i-us.ru)



# XI СИМПОЗИУМ ПО ПРОБЛЕМЕ ИЗБЫТОЧНОСТИ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ

2 – 6 июля 2007 г.  
Санкт-Петербург



NOKIA

Место проведения симпозиума:  
комфортабельный теплоход "Санкт-Петербург",  
совершающий круиз по рекам Нева и Свирь, озерам Ладога и Онега



Дополнительная информация и справки  
Организационный комитет симпозиума:  
190000, Санкт-Петербург, Большая Морская ул., 67,  
Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения,  
тел./факс. (+7-812) 494-70-52  
сайт: <http://k36.org/redundancy2007/>  
эл. почта: [redundancy2007@vu.spb.ru](mailto:redundancy2007@vu.spb.ru)

ISSN 1684-8853



9 771684 885009