

ISSN 1684-8853 (print); ISSN 2541-8610 (online)

ИНФОРМАЦИОННО- УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ



1(134)/2025

1(134)/2025

PEER REVIEWED JOURNAL

INFORMATSIONNO- UPRAVLIAIUSHCHIE SISTEMY (INFORMATION AND CONTROL SYSTEMS)

Founder

A. Vostrikov

PublisherSaint Petersburg State University
of Aerospace Instrumentation**Editor-in-Chief**

E. Krouk

Dr. Sc., Professor, Moscow, Russia

Executive secretary

O. Muravtsova

Editorial Board

S. Andreev

Dr. Sc., Tampere, Finland

V. Anisimov

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

B. Bezruchko

Dr. Sc., Professor, Saratov, Russia

N. Blaunstein

Dr. Sc., Professor, Beer-Sheva, Israel

M. Buzdalov,

PhD, Researcher, Saint Petersburg, Russia

C. Christodoulou

PhD, Professor, Albuquerque, New Mexico, USA

A. Dudin

Dr. Sc., Professor, Minsk, Belarus

I. Dumer

PhD, Professor, Riverside, USA

M. Favorskaya

Dr. Sc., Professor, Krasnoyarsk, Russia

L. Fortuna

PhD, Professor, Catania, Italy

A. Fradkov

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

A. Hramov

Dr. Sc., Professor, Innopolis, Russia

L. Jain

PhD, Professor, Canberra, Australia

A. Myllari

PhD, Professor, Grenada, West Indies

K. Samouylov

Dr. Sc., Professor, Moscow, Russia

J. Seberry

PhD, Professor, Wollongong, Australia

M. Sergeev

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

A. Shalyto

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

A. Shepeta

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

Yu. Shokin

RAS Academician, Dr. Sc., Novosibirsk, Russia

A. Smirnov

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

T. Sutikno

PhD, Associate Professor, Yogyakarta, Indonesia

A. Tyugashev,

Dr. Sc., Professor, Samara, Russia

Z. Yuldashev

Dr. Sc., Professor, Saint Petersburg, Russia

A. Zeifman

Dr. Sc., Professor, Vologda, Russia

Editor: A. Larionova**Proofreader:** T. Zvertanovskaia**Design:** M. Chernenko, Yu. Umnitsyna**Layout and composition:** Yu. Umnitsyna**Contact information**The Editorial and Publishing Center, SUAI
67A, Bol'shaya Morskaya, 190000, Saint Petersburg, Russia
Website: <http://i-us.ru/en>, e-mail: i-us.spb@gmail.com
Tel.: +7 - 812 494 70 02**THEORETICAL AND APPLIED MATHEMATICS***Grigoriev E. K., Sergeev A. M.**Method for calculating two-level cyclic quasi-orthogonal matrices
on orders equal to the product of twin primes*

2

INFORMATION PROCESSING AND CONTROL*Motyko A. A., Obukhova N. A., Yakubovich Y. V.**Method for synthesizing optimized lookup tables for color
transformations*

9

INFORMATION CODING AND TRANSMISSION*Vodnev A. A.**Algorithm for constructing matrices that reduce code distance*

23

*Veresova A. M.**Performance evaluation of decoding in channels with memory
with the use of a Markov metric*

29

INFORMATION CHANNELS AND MEDIUM*Kiselev A. V., Tayurov A. V.**Probability density function of angular coordinates noise
for distributed targets replaced by two-point model*

42

CONTROL IN MEDICAL AND BIOLOGICAL SYSTEMS*Sokolov V. S., Kulminskiy D. D.**Robotic system for three-dimensional ultrasound reconstruction
based on force-torque control*

51

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

60

1(134)/2025

РЕЦЕНЗИРУЕМОЕ ИЗДАНИЕ

ИНФОРМАЦИОННО-
УПРАВЛЯЮЩИЕ
СИСТЕМЫ**Учредитель**

А. А. Востриков

ИздательСанкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения**Главный редактор**

Е. А. Крук,

д-р техн. наук, проф., Москва, РФ

Ответственный секретарь

О. В. Муравцова

Редакционная коллегия:

С. Д. Андреев,

д-р техн. наук, Тампере, Финляндия

В. Г. Анисимов,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Б. П. Безручко,

д-р физ.-мат. наук, проф., Саратов, РФ

Н. Блаунштейн,

д-р физ.-мат. наук, проф., Беэр-Шева, Израиль

М. В. Буэдалов,

канд. техн. наук, научный сотрудник, Санкт-Петербург, РФ

Л. С. Джайн,

д-р наук, проф., Канберра, Австралия

А. Н. Дудин,

д-р физ.-мат. наук, проф., Минск, Беларусь

И. И. Думер,

д-р наук, проф., Риверсайд, США

А. И. Зейфман,

д-р физ.-мат. наук, проф., Вологда, РФ

К. Кристодолу,

д-р наук, проф., Альбукерке, Нью-Мексико, США

А. А. Мюллери,

д-р наук, профессор, Гренада, Вест-Индия

К. Е. Самуйлов,

д-р техн. наук, проф., Москва, РФ

Д. Себерри,

д-р наук, проф., Волонгонг, Австралия

М. Б. Сергеев,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

А. В. Смирнов,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Т. Суткиноу,

д-р наук, доцент, Джокьякарта, Индонезия

А. А. Тюгашев,

д-р техн. наук, проф., Самара, РФ

М. Н. Фаворская,

д-р техн. наук, проф., Красноярск, РФ

Л. Фортуна,

д-р наук, проф., Катания, Италия

А. Л. Фрадков,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

А. Е. Храмов,

д-р физ.-мат. наук, Иннополис, РФ

А. А. Шальто,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

А. П. Шепета,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Ю. И. Шокин,

акад. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф., Новосибирск, РФ

З. М. Юлдашев,

д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

Редактор: А. Г. Ларионова**Корректор:** Т. В. Звертановская**Дизайн:** М. Л. Черненко, Ю. В. Умницына**Компьютерная верстка:** Ю. В. Умницына**Адрес редакции:** 190000, г. Санкт-Петербург,

ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, ГУАП, РИЦ

Тел.: (812) 494-70-02, эл. адрес: ius.spb@gmail.com,

сайт: <http://i-us.ru>**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА****Григорьев Е. К., Сергеев А. М.***Метод вычисления двухуровневых циклических
квазиортогональных матриц на порядках, равных
произведению простых чисел-близнецов*

2

ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ И УПРАВЛЕНИЕ**Мотыко А. А., Обухова Н. А., Якубович Ю. В.***Метод синтеза оптимизированных таблиц поиска для цветковых
преобразований*

9

КОДИРОВАНИЕ И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ**Воднев А. А.***Алгоритм построения матриц, уменьшающих расстояние кода*

23

Вересова А. М.*Оценка эффективности использования марковской метрики
при декодировании в каналах с памятью*

29

ИНФОРМАЦИОННЫЕ КАНАЛЫ И СРЕДЫ**Киселев А. В., Тауров А. В.***Функция распределения шумов угловых координат
распределенной цели, замещающей двухточечной моделью*

42

УПРАВЛЕНИЕ В МЕДИЦИНЕ И БИОЛОГИИ**Соколов В. С., Кульминский Д. Д.***Робототехническая система для трехмерной ультразвуковой
реконструкции на основе силомоментного управления*

51

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

60

Журнал входит в БД Scopus и в Перечень рецензируемых научных изданий,
в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций
на соискание ученой степени кандидата наук,
на соискание ученой степени доктора наук.

Сдано в набор 09.01.25. Подписано в печать 24.02.25. Дата выхода в свет: 26.02.2025.

Формат 60×84/8. Гарнитура CentSchbkCyrill BT. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 7,3. Уч.-изд. л. 10,2. Тираж 1000 экз (1-й завод 50 экз.). Заказ № 44.

Оригинал-макет изготовлен в редакционно-издательском центре ГУАП.

190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А.

Отпечатано в редакционно-издательском центре ГУАП.

190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А.

Распространяется бесплатно.

Журнал зарегистрирован в Министерстве РФ по делам печати,

телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации ПИ № 77-12412 от 19 апреля 2002 г.

Перерегистрирован в Роскомнадзоре.

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-82226 от 23 ноября 2021 г.

© А. А. Востриков, 2025



Метод вычисления двухуровневых циклических квазиортогональных матриц на порядках, равных произведению простых чисел-близнецов

Е. К. Григорьев^а, старший преподаватель, orcid.org/0000-0001-5981-4074

А. М. Сергеев^а, канд. техн. наук, доцент, [orcid.org/0000-0002-4788-9869](mailto:aleks.asklab@gmail.com), aleks.asklab@gmail.com

^аСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

Введение: структурированные ортогональные и квазиортогональные матрицы с двумя значениями элементов как математические объекты получили широкое распространение в решении технических задач обработки и передачи информации. При этом поиск и вычисление квазиортогональных матриц на порядках, равных произведению простых чисел-близнецов, являются трудоемкими задачами, которые требуют особого подхода. **Цель:** разработать метод вычисления циклических квазиортогональных матриц, существующих на порядках произведений простых чисел-близнецов. **Результаты:** анализ известных методов поиска и вычисления квазиортогональных матриц циклической структуры с двумя значениями элементов $\{1, -b\}$, существующих на порядках произведений простых чисел-близнецов, выявил их ограничения либо при вычислении элемента b , либо при поиске первой строки матрицы. Предложен метод вычисления матриц, основанный на аналитических зависимостях значения элемента b от порядка матрицы, что в сравнении с известными методами заметно снижает время расчета и открывает возможности эффективного вычисления матриц высоких порядков. Полученные при помощи предлагаемого метода матрицы при сохранении циклической структуры отличны от найденных ранее матриц целочисленным значением весовой функции, а также значениями элемента b , что открывает возможность дальнейших исследований по поиску подобных матриц на уже известных порядках существования матриц Мерсенна. **Практическая значимость:** полученные при помощи предлагаемого метода матрицы, являясь ядром матриц Адамара, позволяют пополнить базу матриц с двумя значениями элементов для задач обработки информации и получения кодовых последовательностей с хорошими корреляционными свойствами.

Ключевые слова — ортогональные преобразования, матрицы Адамара, матрицы Мерсенна, симметрии матриц, циклические матрицы, простые числа-близнецы.

Для цитирования: Григорьев Е. К., Сергеев А. М. Метод вычисления двухуровневых циклических квазиортогональных матриц на порядках, равных произведению простых чисел-близнецов. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 1, с. 2–8. doi:10.31799/1684-8853-2025-1-2-8, EDN: JYHOIX

For citation: Grigoriev E. K., Sergeev A. M. Method for calculating two-level cyclic quasi-orthogonal matrices on orders equal to the product of twin primes. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 2–8 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-2-8, EDN: JYHOIX

Введение

Ортогональные (квазиортогональные) матрицы как математические объекты получили широкое распространение при решении технических задач обработки и передачи информации [1–12], среди которых задачи помехоустойчивого кодирования [2–4], обеспечения конфиденциальности данных в незащищенных коммуникациях [3, 4], синтеза кодовых последовательностей [5–9] и др.

Наибольший интерес для практического применения представляют матрицы симметричной или циклической структуры с двумя значениями элементов (уровнями), позволяющие оптимизировать объем памяти, используемый для генерации и хранения, а также структурировать вычисления с ними [13–15].

Это матрицы Адамара \mathbf{H}_n [1] и Мерсенна \mathbf{M}_n [16] с двумя значениями уровней $\{1, -1\}$ и $\{1, -b\}$

соответственно, для которых справедливы следующие квадратичные условия связи:

$$\mathbf{H}_n \mathbf{H}_n^T = n\mathbf{I}; \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_n \mathbf{M}_n^T = \omega(n)\mathbf{I}, \quad (2)$$

где n — порядок матрицы, а $\omega(n)$ — ее вес [16].

Сегодня матрицы Адамара и Мерсенна являются не просто объектом теоретических исследований, как существующие на соседних порядках $n = 4t$ и $n = 4t - 1$ соответственно, где t — натуральное число, но и основой пополнения библиотеки матриц, способствующей расширению круга и размера задач с ортогональными преобразованиями.

Взаимосвязи матриц Мерсенна и Адамара позволяют легко получать различные конструкции последних, например симметричную [16, 17] или в форме циклического «ядра» с окаймлением [18].

Для иллюстрации указанных взаимосвязей будет удобно воспользоваться графическим представлением матриц в виде так называемых «портретов». Установим, что на всех рисунках в рамках настоящей статьи, где будут представлены портреты, черным квадратам будут соответствовать уровни матрицы -1 или $-b$, а белым квадратам — уровень 1 .

В качестве примера рассмотрим рис. 1, на котором изображены две матрицы Мерсенна одиннадцатого порядка симметричной (рис. 1, а) и циклической (рис. 1, в) структуры. Связанные с ними нормализованные матрицы Адамара двенадцатого порядка (рис. 1, б и г соответственно) получают путем округления уровня $-b$ до -1 , инверсией элементов матрицы и добавлением «каймы» в виде первой строки и первого столбца, состоящей из единиц.

Выполнение данной цепочки действий в обратном порядке позволяет получить исходные матрицы Мерсенна [16].

Таким образом, нахождение новых матриц, существующих на соседних порядках, открывает возможность расширить набор матриц для использования в ортогональных преобразованиях [19].

Для поиска квазиортогональных матриц в настоящее время применяются различные

методы, например модифицированные методы Сильвестра, Пэли или Скарпи, методы, использующие вычисления в полях Галуа, метод Секереша или классические комбинаторные методы [16].

Однако обособленно стоит случай, при котором порядок матрицы равен произведению простых чисел-близнецов $n = p(p + 2)$, поскольку итерационный алгоритм в данном случае неприменим, а поля Галуа такого размера нет [16]. Целью настоящей работы является разработка метода вычисления циклических квазиортогональных матриц, существующих на порядках произведений простых чисел-близнецов.

Методы вычисления квазиортогональных матриц

Известен метод вычисления матриц Мерсенна на основе использования динамических систем, описанный в работе [16, с. 179]. Авторами отмечается: «Можно вычислить p значений $x^k \bmod(n)$ и $q - p$ значений $y^k \bmod(n)$ с основаниями $x = y \bmod(p)$, $x = 0 \bmod(p + 2)$, где y — примитивный элемент групп $GF(p)$ и $GF(p + 2)$, $q = (n - 1)/2$. Примитивный элемент — это любой элемент, показательная функция от которого обходит всю группу...» Элемент b в данном случае вычисляется как $t / (t + \sqrt{t})$.

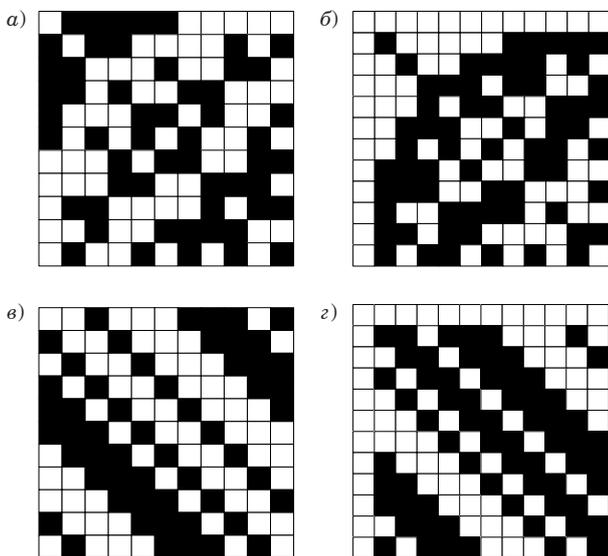
В более поздней работе [18] предложен альтернативный метод, при котором генерация первой строки циклической квазиортогональной матрицы с элементами $\{1, -b\}$ осуществляется на основе последовательностей Якоби — одного из известных циклических разностных множеств Адамара.

Генерация происходит в соответствии со следующим правилом:

$$z_N = \begin{cases} 1, & \text{если } N = 0 \pmod{pq} \\ 1, & \text{если } N = 0 \pmod{q}, N \neq 0 \pmod{p} \\ -1, & \text{если } N = 0 \pmod{p}, N \neq 0 \pmod{q} \\ \left(\frac{n}{pq}\right), & \text{если } N \neq 0 \pmod{q}, N \neq 0 \pmod{p} \end{cases}, \quad (3)$$

где z_N — элемент первой строки; $q = (p + 2)$; $\left(\frac{N}{p}\right)$ и $\left(\frac{N}{q}\right)$ — символы Лежандра, а $\left(\frac{N}{pq}\right) = \left(\frac{N}{p}\right)\left(\frac{N}{q}\right)$ — символ Якоби [18].

Пример. Рассмотрим данный метод на примере вычисления матрицы порядка 15 для $p = 3$ и $q = 5$. После проведения несложных вычислений для каждого элемента получим, что квадратичными вычетами являются следующие элементы:



■ **Рис. 1.** Иллюстрация взаимосвязей между матрицами на соседних порядках: а — портрет матрицы M_{11} симметричной конструкции; б — портрет матрицы H_{12} симметричной конструкции; в — портрет матрицы M_{11} циклической конструкции; г — портрет матрицы H_{12} конструкции «ядро» с окаймлением

■ **Fig. 1.** Illustration of relationships between matrices on neighboring orders: а — portrait of symmetric matrix M_{11} ; б — portrait of symmetric matrix H_{12} ; в — portrait of circulant matrix M_{11} ; г — portrait of “core” with border design matrix H_{12}

$$\left(\frac{0}{15}\right) = \left(\frac{1}{15}\right) = \left(\frac{2}{15}\right) = \left(\frac{4}{15}\right) = \left(\frac{5}{15}\right) = \left(\frac{8}{15}\right) = \left(\frac{10}{15}\right) = 1,$$

а квадратичными невычетами –

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{15}\right) &= \left(\frac{6}{15}\right) = \left(\frac{7}{15}\right) = \left(\frac{9}{15}\right) = \left(\frac{11}{15}\right) = \\ &= \left(\frac{12}{15}\right) = \left(\frac{13}{15}\right) = \left(\frac{14}{15}\right) = -1. \end{aligned}$$

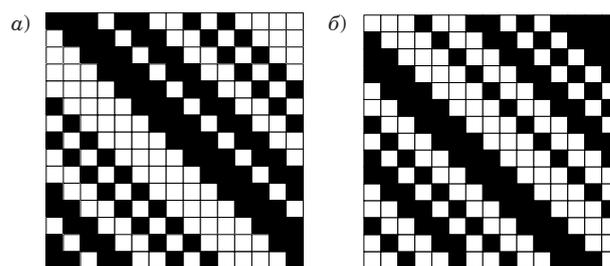
Соответственно, последовательность Якоби будет записана как $z = \{1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, -1\}$.

Вычисление элемента b квазиортогональной матрицы для замены элементов со значением -1 в полученной последовательности происходит в соответствии с алгоритмом [18], структурная схема которого представлена на рис. 2.

В качестве примера на рис. 3 приведены портреты вычисленных с использованием методов из работ [16] и [18] циклических квазиортогональных матриц порядка 15.

Декомпозиция двух представленных методов показывает, что процесс получения квазиортогональных матриц можно разделить на два этапа: на первом этапе задается структура циклической матрицы путем генерации первой строки, а на втором вычисляется значение элемента b .

Таким образом, первый из рассмотренных методов вычисления матриц [16] имеет сложный этап генерации первой строки, что компенсируется простотой вычисления элемента b . Во втором методе [18], наоборот, при простоте методики генерации первой строки значительно возрастает сложность вычисления элемента b в символ-



■ **Рис. 3.** Портреты циклических квазиортогональных матриц порядка 15, вычисленных на основе метода из работы [16] (а) и [18] (б)

■ **Fig. 3.** Portraits of cyclic quasi-orthogonal matrices of order 15, calculated based on the method from [16] (a) and [18] (b)

ном виде. Таким образом, можно сказать, что при невозможности модифицировать процесс генерации первой строки для достижения поставленной цели целесообразно проанализировать способы ускорения вычисления элемента b .

Метод вычисления квазиортогональных матриц на порядках, равных произведению простых чисел-близнецов

В работе [18] анализировались корреляционные свойства модифицированных кодовых последовательностей, основанных на строках циклических квазиортогональных матриц. Следует отметить, что именно длинные кодовые последовательности обеспечивают повышение помехоустойчивости и улучшение энергетических характеристик при их использовании, например, в системах радиолокации и связи [20, 21]. Таким образом, необходимо вычислять ма-



■ **Рис. 2.** Структурная схема метода вычисления элемента b
 ■ **Fig. 2.** Structural diagram of the way for calculating element b

трицы высоких порядков, обязательность вычислений в символьном виде значительно замедляет этот процесс.

Например, для пары $p = 29$ и $q = 31$ вычисление элемента b на ПК с Intel Core I7-10510U и 16 ГБ оперативной памяти заняло более часа.

Напомним, что уравнение связи для квазиортогональных матриц Мерсенна записывается как (2) и вес $\omega(n)$ является функцией от порядка матрицы. Ниже приводится впервые выявленная взаимосвязь, позволяющая существенно ускорить получение матриц. Она состоит в том, что значение веса для нескольких первых порядков, найденных при помощи метода вычисления матриц из [18], равно квадрату меньшего простого числа-близнеца:

$$\begin{aligned} p = 3, q = 5 : \mathbf{M}_n \mathbf{M}_n^T &= 9\mathbf{I}; \\ p = 5, q = 7 : \mathbf{M}_n \mathbf{M}_n^T &= 25\mathbf{I}; \\ p = 11, q = 13 : \mathbf{M}_n \mathbf{M}_n^T &= 121\mathbf{I}. \end{aligned}$$

Таким образом, можно предположить, что для указанных циклических квазиортогональных матриц вес $\omega(n) = p^2$. Тогда, используя данный вес, можно вывести аналитическое выражение для элемента b через порядок и значение положительного элемента a , не всегда равного 1, а именно:

$$p^2 = \frac{(n-1)a^2 + (n+1)b^2}{2},$$

где в числителе учтен тот факт, что количество отрицательных элементов на единицу больше числа положительных элементов в строке матрицы [16].

Обозначив порядок ближайшей матрицы Адамара как $h = n + 1$, получим аналитическое выражение для расчета элемента b :

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{(n+1-1-1)a^2 + (n+1)b^2}{2}; \\ p^2 &= \frac{(h-2)a^2 + hb^2}{2}; \\ b &= \sqrt{\frac{2p^2 - (h-2)a^2}{h}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Для демонстрации возможности вычисления элемента b по выражению (4) сравним предлагаемый метод решения с изложенным в работе [18] (см. рис. 2).

Значения вычисленных и округленных до четвертого знака после запятой элементов b при $a = 1$ для различных порядков, а также затраченное время τ представлены в табл. 1.

Таким образом, предлагаемый метод вычисления двухуровневых квазиортогональных матриц, существующих на порядках простых чисел-близнецов, предполагает генерацию первой строки матрицы по правилу (3) с последующей заменой элементов со значением -1 на значение $-b$, где b вычисляется по выражению (4).

Сама матрица формируется циклическим сдвигом вправо первой строки. Отметим, что процесс формирования первой строки можно заменить на операцию чтения из памяти, поскольку первые строки матриц представляют собой известные кодовые последовательности Якоби.

Следует отметить, что предлагаемый метод вычисления не ограничивается порядком 3599. Авторами последовательно были вычислены матрицы до пары $p = 179, q = 181$ включительно, что соответствует порядку 32 399, однако предлагаемый метод позволяет вычислить матрицы на всех остальных порядках, равных произведению простых чисел-близнецов. Последнее утверждение обосновывается детерминированностью процедур нахождения первой строки матрицы и вычисления элемента b .

Сравнив получаемые при помощи двух разных методов матрицы порядка 15, представленные на рис. 3, можно заметить, что их структуры схожи. Однако у матриц, формируемых методом из работы [16], количество отрицательных элементов на единицу меньше количества положительных элементов. У матриц, вычисляемых предлагаемым методом, отрицательных элементов на единицу больше числа положительных элементов. Сравнение матриц приведено в табл. 2.

Сравнение параметров матриц из табл. 2 показывает, что, хотя матрицы, формируемые предлагаемым методом, не достигают локального максимума детерминанта, они также являются

■ **Таблица 1.** Сравнение скорости вычисления матриц
 ■ **Table 1.** Comparison of matrix calculation speed

Простые числа-близнецы	Порядок матрицы	Параметр	Подход из [18]	Предлагаемый метод
$p = 17, q = 19$	323	b	0,8889	0,8889
		τ, c	256,56	0,02
$p = 29, q = 31$	899	b	0,9333	0,9333
		τ, c	4535,77	0,02
$p = 41, q = 43$	1763	b	0,9524	0,9524
		τ, c	25 140,86	0,02
$p = 59, q = 61$	3599	b	0,9667	0,9667
		τ, c	219 600,57	0,06

■ **Таблица 2.** Сравнение вычисленных квазиортогональных матриц
 ■ **Table 2.** Comparison of computed quasi-orthogonal matrices

Предмет сравнения	Подход из [16]	Предлагаемый метод
Структура матрицы	Циклическая	Циклическая
Выражение для расчета b	$b = t / (t + \sqrt{t})$	$b = \sqrt{\frac{2p^2 - (h-2)a^2}{h}}$
Весовая функция $\omega(n)$	$\frac{(n+1)a^2 + (n-1)b^2}{2}$	p^2
Ядро матрицы Адамара	Да	Да
Локальный максимум детерминанта	+	-

ядром матриц Адамара и у них значение весовой функции $\omega(n) = p^2$ или $\omega(n) = n - 2p$ также целочисленное, как и у матриц Адамара с $\omega(n) = n$.

Заключение

Поиск квазиортогональных матриц на порядках, равных произведению простых чисел-близнецов, не может быть осуществлен распространенными методами и требует особого подхода. Проведенный анализ известных методов вычисления подобных матриц показал ограниченную применимость метода с использованием динамических систем.

Предложенный в работе метод по сравнению с прототипом имеет лучшие показатели не только по времени, но и по возможности вычисления матриц высоких порядков. Дополнительно открывается возможность находить матрицы не только с элементами $\{1, -b\}$, но и с элементами $\{a, -b\}$, что позволит значительно пополнить базу двухуровневых матриц для задач обработки информации и получения кодовых последовательностей.

Значимым результатом является то, что получаемые при помощи предлагаемого метода

матрицы при сохранении циклической структуры отличаются от известных матриц Мерсенна целочисленным значением весовой функции и значением элемента b . Этот результат открывает возможность дальнейших исследований результатов поиска подобных матриц на уже известных порядках Мерсенна.

Благодарность

Авторы выражают благодарность профессорам М. Б. Сергееву и Н. А. Балонину за конструктивные замечания и помощь в подготовке статьи.

Финансовая поддержка

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003 «Фундаментальные основы построения помехозащищенных систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга».

Литература

1. **Dziech A.** New orthogonal transforms for signal and image processing. *Applied Sciences*, 2021, no. 11(16), pp. 7433. doi:10.3390/app11167433
2. **Хвощ С. Т.** Матрицы Адамара в космической связи. *Инженерный вестник Дона*, 2024, № 1, с. 210–222. http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_24_1y24_Chvosh.pdf_a054a7270c.pdf (дата обращения: 20.10.2024).
3. **Sergeev A. M., Vostrikov A. A.** Calculating symmetrical Hadamard matrices of Balonin – Seberry con-

struction for coding and masking. *Procedia Computer Science*, 2020, vol. 176, pp. 1722–1728. doi:10.1016/j.procs.2020.09.197

4. **Sergeev M. B., Blaunstein N. S.** *Matrix Approach to Solution of the Inverse Problems for Multimedia Wireless Communication Links*. Computer Vision in Advanced Control Systems-5. Intelligent Systems Reference Library. Springer, 2020, pp. 99–118. doi:10.1007/978-3-030-33795-7_4
5. **Сергеев М. Б., Ненашев В. А., Сергеев А. М.** Вложенные кодовые конструкции Баркера – Мерсенна – Рагхаварао. *Информационно-управляющие*

- системы, 2019, № 3, с. 71–81. doi:10.31799/1684-8853-2019-3-71-81
6. **Леухин А. Н.** Построение циклических разностных множества Адамара. *Математические методы распознавания образов*, 2009, т. 14, № 1, с. 395–398.
 7. **Manjhi P. K.** Some results on the parameters of the general difference sets correspond to circulant partial Hadamard matrices. *Research in Mathematics*, 2022, no. 9(1). doi:10.1080/27684830.2022.2152961
 8. **Dimitrov M., Baitcheva T., Nikolov N.** Efficient generation of low autocorrelation binary sequences. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, vol. 27, pp. 341–345. doi:10.1109/LSP.2020.2972127
 9. **Shi M., Li Y., Cheng W., Crnkovic D., Krotov D., Sole P.** Self-dual Hadamard bent sequences. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2023, vol. 36, pp. 894–908. doi:10.1007/s11424-023-2276-8
 10. **Ягнятинский Д. А., Федосеев В. Н.** Алгоритм последовательной коррекции аберраций волнового фронта по критерию минимизации размера фокального пятна. *Оптический журнал*, 2019, т. 86, № 1, с. 32–39. doi:10.17586/1023-5086-2019-86-01-32-39
 11. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б., Суздаль В. С.** Матричные модели обобщенной кристаллографии. *Информационно-управляющие системы*, 2016, № 4, с. 26–33. doi:10.15217/issn1684-8853.2016.4.26
 12. **Zhang H., Du K., Zhao C., Tang J., Si S., Jia W., Xue L., Li Z.** Optimizing the ordering of the Hadamard masks of ghost imaging suitable for the efficient face reconstruction using the max-projection method. *Scientific Reports*, 2023, vol. 13(22702). doi:10.1038/s41598-023-48453-2
 13. **Антонов А. П., Беседин Д. С., Филиппов А. С.** Исследование и сравнительный анализ эффективности программной и аппаратных реализаций операции суммирования транспонированных матриц. *Информатика, телекоммуникации и управление*, 2022, т. 15, № 4, с. 51–63. doi:10.18721/JCSTCS.15404. <https://infocom.spbstu.ru/article/2022.75.4/> (дата обращения: 20.10.2024).
 14. **Тарасов И. Е., Советов П. Н., Люлява Д. В., Мирзоян Д. И.** Методика проектирования специализированных вычислительных систем на основе совместной оптимизации аппаратного и программного обеспечения. *Russian Technological Journal*, 2024, т. 12, № 3, с. 37–45. doi:10.32362/2500-316X-2024-12-3-37-45, EDN: PXXDKR
 15. **Bernasconi A., Berti A., Corso G. M. d., Poggiali A.** Quantum subroutine for efficient matrix multiplication. *IEEE Access*, 2024, vol. 12, pp. 116274–116284. doi:10.1109/ACCESS.2024.3446176
 16. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Специальные матрицы: псевдообратные, ортогональные, адамаровы и критские: монография. СПб., Политехника, 2019. 196 с. doi:10.25960/7325-1155-0
 17. **Сергеев А. М.** Обобщенные матрицы Мерсенна и гипотеза Балонины. *Автоматика и вычислительная техника*, 2014, № 4, с. 35–43.
 18. **Григорьев Е. К., Ненашев В. А., Сергеев А. М., Самохина Е. В.** Поиск и модификация кодовых последовательностей на основе персимметричных квазиортогональных циркулянтов. *Телекоммуникации*, 2020, № 10, с. 27–33. EDN: EGQMAS
 19. **Балонин Н. А., Сергеев М. Б.** Критские матрицы Одина и Тени, сопровождающие простые числа и их степени. *Информационно-управляющие системы*, 2022, № 1, с. 2–7. doi:10.31799/1684-8853-2022-1-2-7
 20. **Опалихина О. В.** Формирование M-последовательности над полем вычетов Галуа. *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, 2023, № 2, с. 77–90. doi:10.17308/sait/1995-5499/2023/2/77-90, EDN: ZWXTCG
 21. **Кукунин Д. С., Березкин А. А., Киричек Р. В.** Многослойные ортогональные структуры на основе последовательностей максимальной длины. *Инфокоммуникационные технологии*, 2022, т. 20, № 2, с. 42–50. doi:10.18469/ikt.2022.20.2.05

UDC 519.614

doi:10.31799/1684-8853-2025-1-2-8

EDN: JYHOIX

Method for calculating two-level cyclic quasi-orthogonal matrices on orders equal to the product of twin primesE. K. Grigoriev^a, Senoir Lecturer, orcid.org/0000-0001-5981-4074A. M. Sergeev^a, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-4788-9869, aleks.asklab@gmail.com^aSaint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Structured orthogonal and quasi-orthogonal matrices with a small number of levels have become widely used as mathematical objects in solving technical problems of information processing and transmitting. At the same time, the search and calculation of quasi-orthogonal matrices at orders equal to the product of twin primes are a labor-intensive task that cannot be carried out by common methods and requires a special approach. **Purpose:** To develop a method for calculating cyclic quasi-orthogonal matrices that exist on orders of products of twin prime numbers. **Results:** We carry out the analysis of the known methods for the search and calculation of quasi-orthogonal matrices of cyclic structure with two values of levels $\{1, -b\}$, existing on orders equal to the product of twin primes. We reveal their limitations with this analysis. We propose a method for calculating matrices based on analytical dependencies of the value of the element b on the order of the matrix, which, in comparison with the known methods, significantly reduces the calculation time and

makes it possible to efficiently calculate high-order matrices. Matrices obtained with the use of the proposed method, while preserving the cyclic structure, differ from the previously found matrices by the integer value of the weight function, as well as by the values of the element b , which opens up the possibility of further research on searching for similar matrices on already known orders of existence of Mersenne matrices. **Practical relevance:** The matrices obtained with the use of the proposed method, being the core of the Hadamard matrices, make it possible to replenish the base of two-level matrices for the tasks of data processing and for obtaining code sequences with good correlation properties.

Keywords – orthogonal transformation, Hadamard matrices, Mersenne matrices, matrix symmetries, cyclic matrices, twin primes.

For citation: Grigoriev E. K., Sergeev A. M. Method for calculating two-level cyclic quasi-orthogonal matrices on orders equal to the product of twin primes. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 2–8 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-2-8, EDN: JYHOIX

Financial support

The work was carried out with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. FSRF-2023-0003 “Fundamentals of structures of noise-protected spacecraft systems communication and satellite communications, relative navigation gation, technical vision and aerospace monitoring”.

References

1. Dziech A. New orthogonal transforms for signal and image processing. *Applied Sciences*, 2021, no. 11(16), pp. 7433. doi:10.3390/app11167433
2. Hvoshch S. T. Hadamard matrices in cosmic communication. *Engineering Journal of Don*, 2024, no. 1, pp. 210–222. Available at: http://www.ivdon.ru/uploads/article/pdf/IVD_24_1y24_Chvosh.pdf_a054a7270c.pdf (accessed 20 October 2024) (In Russian).
3. Sergeev A. M., Vostrikov A. A. Calculating symmetrical Hadamard matrices of Balonin – Seberry construction for coding and masking. *Procedia Computer Science*, 2020, vol. 176, pp. 1722–1728. doi:10.1016/j.procs.2020.09.197
4. Sergeev M. B., Blaunstein N. S. *Matrix Approach to Solution of the Inverse Problems for Multimedia Wireless Communication Links*. In: *Computer Vision in Advanced Control Systems-5*. Intelligent Systems Reference Library. Springer, 2020, pp. 99–118. doi:10.1007/978-3-030-33795-7_4
5. Sergeev M. B., Nenashev V. A., Sergeev A. M. Nested code sequences of Barker – Mersenne – Raghavarao. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2019, no. 3, pp. 71–81 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2019-3-71-81
6. Leuhin A. N. Construction of cyclic difference Hadamard sets. *Matematicheskie metody raspoznavaniya obrazov* [Mathematical methods of pattern recognition], 2009, vol. 14 no. 1, pp. 395–398 (In Russian).
7. Manjhi P. K. Some results on the parameters of the general difference sets correspond to circulant partial Hadamard matrices. *Research in Mathematics*, 2022, no. 9(1). doi:10.1080/27684830.2022.2152961
8. Dimitrov M., Baitcheva T., Nikolov N. Efficient generation of low autocorrelation binary sequences. *IEEE Signal Processing Letters*, 2020, vol. 27, pp. 341–345. doi:10.1109/LSP.2020.2972127
9. Shi M., Li Y., Cheng W., Crnkovic D., Krotov D., Sole P. Self-dual Hadamard bent sequences. *Journal of Systems Science and Complexity*, 2023, vol. 36, pp. 894–908. doi:10.1007/s11424-023-2276-8
10. Yagnyatinskiy D. A., Fedoseyev V. N. Algorithm for sequential correction of wavefront aberrations with the criterion of focal spot size minimization. *Journal of Optical Technology*, 2019, vol. 86 no. 1, Article 25. doi:10.1364/jot.86.000025
11. Balonin N. A., Sergeev M. B., Suzdal V. S. Matrix models of generalized crystallography. *Information and Control Systems* [Information and Control Systems], 2016, no. 4, pp. 26–33 (In Russian). doi:10.15217/issn1684-8853.2016.4.26
12. Zhang H., Du K., Zhao C., Tang J., Si S., Jia W., Xue L., Li Z. Optimizing the ordering of the Hadamard masks of ghost imaging suitable for the efficient face reconstruction using the max-projection method. *Scientific Reports*, 2023, vol. 13(22702). doi:10.1038/s41598-023-48453-2
13. Antonov A. P., Besedin D. S., Filippov A. S. Research and comparative analysis of the effectiveness of software and hardware implementations of the operation of summing transposed matrices. *Computing, Telecommunications and Control*, 2022, vol. 15, no. 4, pp. 51–63 (In Russian). doi:10.18721/JCSTCS.15404. Available at: <https://infocum.spbstu.ru/article/2022.75.4/> (accessed 20 October 2024).
14. Tarasov I. E., Sovietov P. N., Lulyava D. V., Mirzoyan D. I. Method for designing specialized computing systems based on hardware and software co-optimization. *Russian Technological Journal*, 2024, vol. 12, no. 3, pp. 37–45. doi:10.32362/2500-316X-2024-12-3-37-45, EDN: PXKDKR
15. Bernasconi A., Berti A., Corso G. M. d., Poggiali A. Quantum subroutine for efficient matrix multiplication. *IEEE Access*, 2024, vol. 12, pp. 116274–116284. doi:10.1109/ACCESS.2024.3446176
16. Balonin N. A., Sergeev M. B. *Special'ny'e matricy: pseudoobratny'e, ortogonal'ny'e, adamarovy' i kritskie* [Special matrices: pseudo-return, orthogonal, Hadamardian and Cretan]. Saint-Petersburg, Politekhnika Publ., 2019. 196 p. (In Russian) <https://doi.org/10.25960/7325-1155-0>
17. Sergeev A. M. Generalized Mersenne matrices and Balonin's conjecture. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2014, no. 48, pp. 214–220. doi:10.3103/S0146411614040063
18. Grigoriev E. K., Nenashev V. A., Sergeev A. M., Samohina E. V. Search and modification of code sequences based on persymmetric quasi-orthogonal circulants. *Telekommunikatsii* [Telecommunications], 2020, no. 10, pp. 27–33 (In Russian). EDN: EGQMAS
19. Balonin N. A., Sergeev M. B. Odin and Shadow Cretan matrices accompanying primes and their powers. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2022, no. 1, pp. 2–7 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2022-1-2-7
20. Opalikhina O. V. Formation of an M-sequence over the Galois residue field. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*, 2023, no. 2, pp. 77–90 (In Russian). doi:10.17308/sait/1995-5499/2023/2/77-90, EDN: ZWXTCG
21. Kukunin D. S., Berezkin A. A., Kirichek R. V. Multilayer orthogonal structures based on maximum length sequences. *Infokommunikacionnye tekhnologii* [Infokommunikacionnye Tehnologii], 2022, no. 20(2), pp. 42–50 (In Russian). doi:10.18469/ikt.2022.20.2.05



Метод синтеза оптимизированных таблиц поиска для цветовых преобразований

А. А. Мотыко^{а,б}, канд. техн. наук, доцент, orcid.org/0000-0003-4241-4298

Н. А. Обухова^{а,б}, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0003-1953-2085, natalia172419@yandex.ru

Ю. В. Якубович^а, канд. физ.-мат. наук, доцент, orcid.org/0000-0002-9922-0593

^аСанкт-Петербургский государственный университет, Университетская наб., 7–9, Санкт-Петербург, 199034, РФ

^бСанкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Профессора Попова ул., 5, Санкт-Петербург, 197376, РФ

Введение: цветовые преобразования широко используются при обработке информации в телевизионных системах. Одним из самых популярных и востребованных способов реализации цветовых преобразований являются трехмерные таблицы поиска. При этом существующие методы создания таблиц поиска не лишены недостатков. **Цель:** разработать аналитический метод построения оптимизированных трехмерных таблиц поиска с заданными свойствами (обеспечивающими гладкость преобразования, возможность построения при неполном покрытии отображаемых пространств исходными данными и др.) и с учетом существующих недостатков в подходах к регуляризации. **Результаты:** предложен новый аналитический метод построения оптимизированных таблиц поиска для цветовых преобразований, которые по своим характеристикам соответствуют или превосходят неоптимизированные таблицы с размером, соответствующим следующему шагу n ($N = 2^n + 1$) и при этом обеспечивают лучшую гладкость преобразования. По сравнению с современными аналогами, применяемыми в телевизионных системах для цветовых преобразований, метод демонстрирует в 1,5–2 раза меньшую среднюю ошибку и в 1,5–4 раза меньший 95%-й перцентиль ошибок. Метод обеспечивает высокую точность цветовых преобразований и обладает хорошей технологичностью за счет получения аналитического решения. Обеспечивая лучшую точность по сравнению с аналогичными методами построения оптимизированных таблиц, предложенный метод сохраняет решетку таблицы в прообразе регулярной и равномерной, что делает процесс построения быстрее, а саму таблицу существенно эффективнее и проще в использовании при реализации в реальной аппаратуре. **Практическая значимость:** метод может применяться при разработке телевизионных систем, в которых требуется высокая точность цветопередачи.

Ключевые слова — цветовые преобразования, цветокоррекция, трехмерные таблицы поиска, оптимизированные 3D LUT, равноконтрастные пространства.

Для цитирования: Мотыко А. А., Обухова Н. А., Якубович Ю. В. Метод синтеза оптимизированных таблиц поиска для цветовых преобразований. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 1, с. 9–22. doi:10.31799/1684-8853-2025-1-9-22, EDN: KRAQDO

For citation: Motyko A. A., Obukhova N. A., Yakubovich Y. V. Method for synthesizing optimized lookup tables for color transformations. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 9–22 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-9-22, EDN: KRAQDO

Введение

Цветовые преобразования, реализуемые при формировании изображений телевизионной системы, направлены на осуществление точной цветопередачи наблюдаемой сцены или реализацию некоторой процедуры, субъективно повышающей визуальное качество изображения для пользователя (повышение контраста, изменение цветового тона и пр.).

Задачу корректной передачи цветов решают колориметрические цветовые преобразования, для которых характерно то, что результат изменения цвета для каждого пикселя не зависит от его окружения [1]. Таким образом:

$$I_2(x, y) = f(I_1(x, y)),$$

где I_1 — цветовые координаты пикселя в исходном цветовом пространстве; I_2 — цветовые ко-

ординаты пикселя в целевом цветовом пространстве; (x, y) — координаты пикселя в растре; f — функция, осуществляющая преобразование.

Задача синтеза цветового преобразования состоит в определении вида функции f и идентификации ее параметров. Существует множество моделей для отображения цветовых пространств, подавляющее большинство которых можно разделить на две группы. К первой группе относятся линейные регрессионные модели. Два основных варианта реализации модели первого порядка содержат девять или 12 коэффициентов [2], но также широко используются полиномиальные модели второго и более высоких порядков (линейные по параметрам), например, различные полиномиальные модели и так называемые рут-полиномиальные приведены в работе [3]. Вторая группа основана на нелинейных моделях. Она включает различные варианты: модель на основе сплайнов [4], радиально-ба-

зисных функций [5], трехмерных таблиц поиска [6], — также к данной группе можно отнести нейросетевые модели [7]. Интенсивное развитие методов синтеза цветowych преобразований связано с возрастающими вместе с развитием телевизионной и фототехнической аппаратуры требованиями к цветопередаче. Неточная цветопередача приводит к появлению ложных (отсутствующих в реальной сцене) цветowych градиентов, вносит ошибки в локальный цветовой контраст и в целом искажает восприятие отображаемой сцены, ухудшает качество изображения.

Постановка задачи разработки нового метода синтеза оптимизированных таблиц поиска для цветowych преобразований

Таблица поиска представляет собой ассоциативный массив, который хранит результаты вычисления некоторой функции в заданных точках (узлах). Таблица позволяет заменить вычисление сложного выражения простыми операциями поиска ближайших узлов (предварительно рассчитанных значений, которые окружают интересующее) и соответствующей интерполяции. Трехмерные таблицы поиска используют для цветowych преобразований очень широко, в частности для преобразования цветowych пространств, при этом исходное пространство называют прообразом, а результирующее — образом. Реализация преобразований с помощью таблиц поиска отличается важными свойствами [8]:

— таблицы поиска при должном размере превосходят по точности иные преобразования, но при этом требуют предварительно рассчитанных пар цветов в пространствах образа и прообраза, причем равномерно покрывающих оба пространства. Это условие легко выполнить для ряда колориметрических задач;

— таблицы поиска, в отличие от аналитических преобразований, способны наилучшим образом моделировать нелинейность отображения в любой локальной области цветowego пространства.

Таблица поиска характеризуется своей размерностью — числом индексов (входных переменных), которое задает нужное значение функции, и числом узлов решетки, т. е. точек, в которых предварительно рассчитано значение аппроксимируемой функции. На современном этапе в цветowych преобразованиях в основном используются трехмерные таблицы следующих размеров: $17 \times 17 \times 17$, $33 \times 33 \times 33$ и $65 \times 65 \times 65$ узлов [9].

Обычно таблицу поиска формализуют как набор V узлов \mathbf{a} в пространстве прообраза \mathbb{R}^n и

соответствующих им значений \mathbf{b} в пространстве образа \mathbb{R}^m :

$$V = [\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^m].$$

Расположение узлов \mathbf{a}_i разделяет n -мерную область g на небольшие подобласти, а соответствующие значения \mathbf{b}_i являются приблизительными оценками отображения g в точках \mathbf{a}_i . С учетом интерполяции значения вычисляют следующим образом. Определяют веса w_{ij} для отображаемой точки \mathbf{c}_i в пространстве прообраза:

$$\sum_{j=1}^{N_v} w_{ij} \mathbf{a}_j = \mathbf{c}_i; \quad \sum_{j=1}^{N_v} w_{ij} = 1,$$

где N_v — число узлов решетки таблицы. Вообще говоря, такое разложение не единственно, но если веса выбирать таким образом, что ненулевые веса будут только для тех узлов $\mathbf{a}_j, j = [1, N_v]$, которые окружают точку \mathbf{c}_i , формируя вокруг нее ячейку решетки таблицы, то обычно выбор весов становится однозначным.

Эти веса затем используют для получения оценки значения преобразования (т. е. координаты в пространстве образа) \mathbf{d}_i в точке \mathbf{c}_i :

$$\widehat{\mathbf{d}}_i = \sum_{j=1}^{N_v} w_{ij} \mathbf{b}_j.$$

Несмотря на то, что таблицы поиска решают сегодня множество задач в области цветowych преобразований, они не лишены недостатков: проблемы с гладкостью преобразования, отсутствие связи с особенностями конкретного отображения, с распределением существующих данных в пространстве отображаемой функции и пр. [10].

В этой связи развивают так называемые оптимизированные таблицы [11–13], в которых положения узлов в пространстве прообраза и их значений в пространстве образа рассчитаны во взаимосвязи посредством некоторой процедуры, обеспечивающей лучшую точность отображения. По виду решетки узлов в пространстве прообраза различают следующие оптимизированные таблицы (рис. 1):

- регулярные:
 - однородные (осуществляется оптимизация значений в пространстве образа);
 - неоднородные (осуществляется оптимизация положения узлов в пространстве прообраза и значений в пространстве образа);
- нерегулярные (осуществляется оптимизация структуры решетки узлов и значений).

Для построения оптимизированной таблицы поиска требуются «обучающие» данные — набор

N_T точек \mathbf{c}_i в пространстве прообраза, для которых значения в образе \mathbf{d}_i известны. Необходимое для формулировки задачи минимизации выражение для функции потерь E , которая вычисляется по точкам обучающего набора, можно записать следующим образом:

$$E = \sum_{i=1}^{N_T} (\widehat{\mathbf{d}}_i - \mathbf{d}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N_T} \left(\sum_{j=1}^{N_v} w_{ij} \mathbf{b}_j - \mathbf{d}_i \right)^2.$$

В данном выражении присутствуют веса w_{ij} , которые удобно составить в матрицу весов \mathbf{W}_a размера $N_T \times N_v$. Эта матрица однозначно определяется расположением узлов решетки $\mathbf{a}_j, j = [1, N_v]$, расположением точек обучающего набора $\mathbf{c}_i, i = [1, N_T]$ и свойствами интерполяции. Тогда в матрично-векторной форме оптимизационная задача формулируется как

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \arg \min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\|\widehat{\mathbf{d}} - \mathbf{d}\|^2 \right) = \arg \min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\|\mathbf{W}_a \mathbf{b} - \mathbf{d}\|^2 \right).$$

Функция не является выпуклой одновременно по \mathbf{a} и \mathbf{b} , однако является отдельно выпуклой по отношению к двум аргументам: минимизация E по \mathbf{b} при фиксированном \mathbf{W}_a выпуклая и наоборот. Оптимизация значений и положений узлов решетки может выполняться по ряду сходных методик [13], как правило, на основе численной минимизации. Для обеспечения гладкости преобразования могут использоваться различные регуляризаторы [14]. Совместная оптимизация положения узлов и значений основана на численных методах, известны реализации на базе алгоритмов минимизации Ллойда – Макса и Линда – Бузо – Грея, кластеризации k-средних и др. [15].

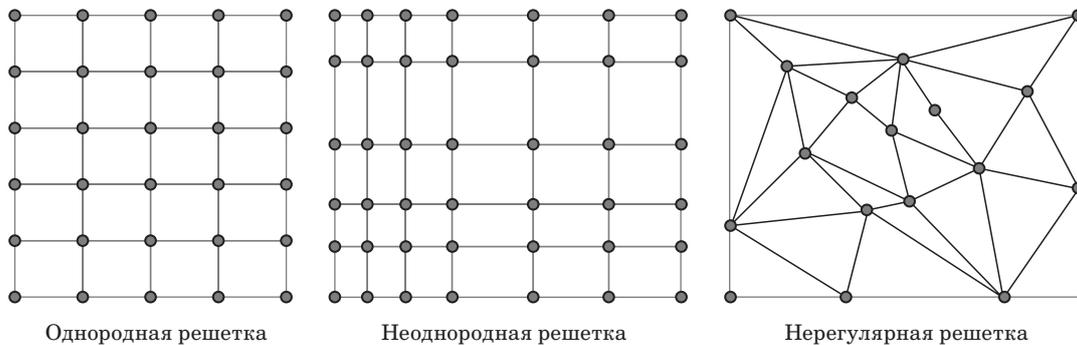
Большинство методов построения оптимизированных таблиц поиска основаны на регулярной решетке узлов в пространстве прообраза. Регулярные решетки значительно проще в ре-

ализации (в том числе аппаратной), обладают вычислительным преимуществом на этапе доступа к ячейкам по сравнению с нерегулярными, но отмечается, что последние лучше способны моделировать нелинейность преобразования при равном числе узлов [10]. Тем не менее именно таблицы поиска с регулярными решетками преобладают сегодня в задачах колориметрии. Из регулярных оптимизированных таблиц наиболее распространенными являются однородные по причине относительной простоты построения.

Необходимой составляющей при синтезе оптимизированных таблиц поиска является использование регуляризаторов [14], позволяющих добиться того, чтобы полученное решение обладало определенными свойствами. Регуляризаторы – это слагаемые в функционале ошибки, которые вносят некий штраф в функцию потерь, если решение отклоняется от желаемого свойства.

Основное качество, которым должна обладать таблица поиска, помимо точной цветопередачи, – гладкость преобразования. Для ряда колориметрических задач (например, отображения цветовых охватов) важно обеспечить отсутствие выхода результирующих значений за пределы допустимых цветов.

Выбор типа регуляризаторов и определение их вклада в расчет минимизируемого функционала является ключевым при синтезе оптимизированной таблицы поиска. Основные типы регуляризаторов подробно рассмотрены в работах [14, 16]. При построении оптимизированных таблиц специальная регуляризация применяется, если точки обучающего набора (т. е. некоторые цвета) расположены неравномерно в пространстве прообраза. Достаточно типичной является ситуация, при которой в некоторых ячейках таблицы цветов не оказывается вовсе. В этом случае задача получается недостаточно определенной. Значения таблицы в пространстве образа могут стягиваться к имеющимся точкам, плохо моделируя существующее преобразование



■ **Рис. 1.** Различные виды решеток двумерных таблиц поиска в пространстве прообраза
 ■ **Fig. 1.** Different types of lookup two-dimensional table lattices in the prototype space

(рис. 2, а). Правильно выбранные параметры регуляризации приводят к тому, что результирующая таблица в пространстве образа окажется достаточно структурированной для адекватной аппроксимации преобразования (рис. 2, б).

Регуляризатор, обеспечивающий гладкость отображения при решении задачи минимизации функционала ошибки, должен препятствовать формированию острых углов между ячейками решетки. Общий подход описан в [14]. Например, для трехмерной таблицы, реализующей отображение из цветового пространства RGB, для каждого внутреннего узла решетки $a_{(j_R j_G j_B)}$ в каждом из трех направлений (вдоль осей R, G, B в пространстве прообраза) выбираются две соседние точки. Например, в случае направления R — это $a_{(j_R+1 j_G j_B)}$ и $a_{(j_R-1 j_G j_B)}$. Идея состоит в том, чтобы оценивать расстояние между соответствующей выпуклой комбинацией образов узлов-соседей $b_{(j_R+1 j_G j_B)}$, $b_{(j_R-1 j_G j_B)}$ и образом рассматриваемого узла $b_{(j_R j_G j_B)}$.

У данного способа регуляризации существует проблема, связанная с тем, что для ячеек большего размера назначается больший штраф за негладкость, чем для ячеек с меньшим размером. Это не оправдано с точки зрения желаемого результата, поскольку относительно большие по размеру ячейки появляются в пространстве образа либо там, где преобразование почти линейно, либо там, где нет или очень мало точек обучающего набора, и данный фактор никак не связан с необходимостью увеличения штрафа за негладкость. Нужно отметить, что этот вопрос не был рассмотрен в известном ряде работ, описывающих регуляризацию [10, 12, 14, 16]. Кроме того, в существующих работах не учитывается, что размеры ячеек в пространстве образа не должны резко меняться. Для обеспечения гладкости и равномерной точности

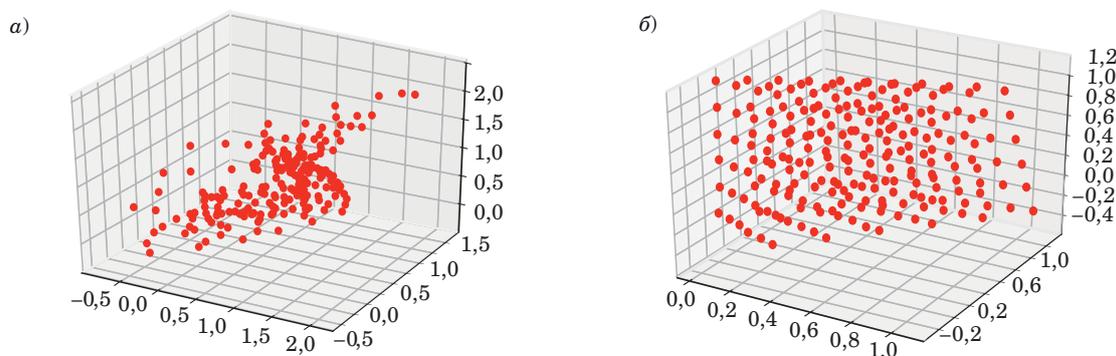
преобразования в таблице соседние ячейки должны иметь сопоставимый размер.

Еще один негативный эффект преобразования, возникающий при построении оптимизированной таблицы, с которым пытаются бороться с помощью регуляризации, состоит в том, что если независимо оценивать образы восьми узлов, формирующих одну ячейку (для трехмерной таблицы), то можно в результате получить существенно нелинейное преобразование даже внутри самой ячейки. Образы кубических ячеек при линейном отображении будут параллелепипедами. Однако в реальных преобразованиях, моделируемых таблицами поиска, образ ячейки может существенно отличаться от параллелепипеда. Регуляризатор должен штрафовать решение за подобное несоответствие. В известной работе [14] соответствующая квадратичная форма убывает, если образ решетки близок к линейному преобразованию равномерной решетки в пространстве прообраза, и, наоборот, растет, если образ сильно отличается от результата линейного преобразования. Однако указанное решение актуально только для равномерных решеток и для определенных схем интерполяции. Поэтому требуется найти альтернативный и более общий подход.

Другим важным свойством цветового преобразования, которого пытаются добиться с помощью введения регуляризационных слагаемых, является контроль выхода результата отображения за установленные границы в пространстве образа. Детали использования данной регуляризации определяются задачей, известное и достаточно общее решение которой приведено в [16].

Таким образом, основные проблемы при создании оптимизированных таблиц следующие.

1. Недостаточная репрезентативность обучающего набора, точки могут неравномерно покрыв-



■ **Рис. 2.** Расположение узлов таблицы $N = 6$ в пространстве образа: а — таблица строилась без использования регуляризации; б — таблица строилась с использованием регуляризации, направленной на сохранение формы ячеек в виде параллелепипедов

■ **Fig. 2.** Location of nodes of the table $N = 6$ in the image space: а — the table was built without using regularization; б — the table was built using regularization aimed at preserving the shape of cells in the form of parallelepipeds

вать цветное пространство, может наблюдаться отсутствие точек в каких-то частях пространства, что затрудняет вычисление оптимизированных значений и положения узлов для этих областей. Соответственно, требуется введение регуляризации, обеспечивающей определенную «жесткость» таблицы, которая препятствует формированию ячеек нерегулярной формы, обусловленной локальным отсутствием точек в обучающем наборе.

2. Недостаток системности в вопросе регуляризации. В основном с помощью регуляризаторов пытаются решить некоторые частные задачи, например добиться гладкости преобразования, но при этом регуляризация оказывается неявно связана со структурой таблицы, и ее вклад трудно объяснить.

3. Численная оптимизация — процесс, не гарантирующий в общем случае нахождение глобального минимума функции ошибки, кроме того, эта процедура характеризуется значительными вычислительными и, следовательно, временными затратами, что исключает построение таблицы в близком к реальному времени.

Очевидно, что для исключения указанных недостатков необходимо решить задачу разработки нового метода создания многомерной таблицы поиска для цветовых преобразований. Новый метод должен:

- обеспечивать создание таблицы, в том числе в случае, если известный набор пар цветов до и после отображения не покрывает всего пространства преобразования;
- позволять создавать таблицы с заданными свойствами (обеспечивающими гладкость преобразования, а также контроль невыхода результатов отображения цветов за пределы допустимого объема) и с учетом существующих недостатков в подходах к регуляризации;
- обладать аналитическим решением, не требующим численной минимизации и гарантирующим достижение глобального оптимума.

Метод синтеза оптимизированных таблиц поиска для цветовых преобразований

При разработке метода для построения таблицы поиска, обладающей заданными свойствами, в первую очередь следует выдвинуть требование об аналитическом решении, которое в общем случае значительно быстрее и более стабильно, чем численная оптимизация. К тому же аналитическое решение гарантирует глобальный минимум ошибки.

Если потребителем цветокоррекции является блок автоматического анализа, то логично использовать евклидову норму разностного векто-

ра истинных и предсказанных таблицей значений. Однако если коррекция ориентирована на человека и используется формула цветовых различий CIEDE2000, то аналитическое решение получить нельзя ввиду специфики самой формулы. В данном случае возможным вариантом становится использование какого-либо современного равноконтрастного цветового пространства, где евклидова норма разностного вектора между предсказанным и истинным значениями цветов близка к воспринимаемой человеком (и к оценке по CIEDE2000). Среди ряда новейших равноконтрастных пространств можно выделить ProLab [17], SRLAB2 [18] и OkLab [19]. ProLab отличается рядом полезных свойств, из которых важнейшим для рассматриваемой задачи является то, что расстояние между цветами в этом пространстве наилучшим образом среди аналогов коррелирует именно с CIEDE2000 [20, 21], являющейся на сегодня принятым стандартом, активно используемым на практике.

ProLab представлено как цветное пространство, полученное путем проективного преобразования CIE XYZ. Следовательно, координаты в ProLab получают с помощью

$$ProLab(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} z_L \\ z_a \\ z_b \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + \mathbf{q}\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{y},$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} 75,5362 & 486,661 & 167,387 \\ 617,714 & -595,448 & -22,2664 \\ 48,3433 & 194,938 & -243,281 \end{pmatrix}, \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0,7554 \\ 3,8666 \\ 1,6739 \end{pmatrix}.$$

Указанные параметры рассчитаны для источника освещения типа D65.

Для вычислительных задач удобно разделить элементы матрицы ProLab на 100 и обозначить ее строки $\mathbf{Q}_L, \mathbf{Q}_a, \mathbf{Q}_b$, а столбцы $\mathbf{Q}_X, \mathbf{Q}_Y, \mathbf{Q}_Z$. Для оценки цветовой разницы в ProLab нужно воспользоваться выражением

$$d^2(z, z') = d_L^2 + d_a^2 + d_b^2,$$

$$d_L = z_L - z'_L, d_a = z_a - z'_a, d_b = z_b - z'_b,$$

где z и z' — координаты двух точек в пространстве ProLab.

Итак, если имеются две точки в некотором целевом цветовом пространстве, то различие между ними можно оценить как

$$d^2(ProLab(\mathbf{y}_i), ProLab(\hat{\mathbf{y}}_i)) = \left(\frac{\mathbf{Q}_L \mathbf{y}_i}{1 + \mathbf{q}\mathbf{y}_i} - \frac{\mathbf{Q}_L \hat{\mathbf{y}}_i}{1 + \mathbf{q}\hat{\mathbf{y}}_i} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{Q}_a \mathbf{y}_i}{1 + \mathbf{q}\mathbf{y}_i} - \frac{\mathbf{Q}_a \hat{\mathbf{y}}_i}{1 + \mathbf{q}\hat{\mathbf{y}}_i} \right)^2 + \left(\frac{\mathbf{Q}_b \mathbf{y}_i}{1 + \mathbf{q}\mathbf{y}_i} - \frac{\mathbf{Q}_b \hat{\mathbf{y}}_i}{1 + \mathbf{q}\hat{\mathbf{y}}_i} \right)^2 \approx$$

$$\approx \frac{(\mathbf{Q}_L(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i))^2 + (\mathbf{Q}_a(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i))^2 + (\mathbf{Q}_b(\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i))^2}{(1 + \mathbf{q}\mathbf{y}_i)^2}.$$

Поскольку логично предположить, что $\hat{\mathbf{y}}_i \approx \mathbf{y}_i$, выражение можно переписать:

$$\rho(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i)^2 = (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i)^T \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q} (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i),$$

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{(1 + \mathbf{q}\mathbf{y}_i)^2} \mathbf{I}_{3 \times 3},$$

где \mathbf{I} — единичная матрица размера 3×3 элемента.

Для определения ошибки цветопередачи таблицы поиска введем матрицу

$$\mathbf{B} = (b_{c,j}), c \in \{X, Y, Z\}, j = 0, \dots, m-1$$

размера $3 \times m$, j -й столбец которой равен неизвестному вектору \mathbf{b}_j , и вектор-столбец

$$\mathbf{W}_i = (w_0(x_i), \dots, w_1(x_i))^T$$

весов, который находят с помощью какого-либо интерполяционного алгоритма. Следовательно, таблица поиска реализует следующее преобразование:

$$\hat{\mathbf{y}}_i = LUT(\mathbf{x}_i) = \mathbf{B}\mathbf{W}_i.$$

Тогда ошибку ρ между истинным значением отображения (записанным в обучающем наборе) и результатом таблицы можно записать как

$$\rho(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i)^2 = (\mathbf{y}_i - \mathbf{B}\mathbf{W}_i)^T \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q} (\mathbf{y}_i - \mathbf{B}\mathbf{W}_i) =$$

$$= \mathbf{W}_i^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{W}_i - 2\mathbf{y}_i^T \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q} \mathbf{B} \mathbf{W}_i + \mathbf{y}_i^T \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q} \mathbf{y}_i.$$

Это квадратичная форма от переменных $b_{c,j}$. Функционал, который аппроксимирует вычисление ошибки цветопередачи, представляет собой сумму подобных выражений для всех i и является квадратичной формой, которую необходимо оптимизировать в задаче. В явном виде коэффициенты этой квадратичной формы для

$$c, c' \in \{X, Y, Z\}, j, j' = 0, \dots, m-1$$

можно представить следующим образом:

$$\text{coef}(b_{c,j} b_{c',j'}, \rho(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i)^2) = w_j(\mathbf{x}_i) (\mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q})_{c,c'} w_{j'}(\mathbf{x}_i);$$

$$\text{coef}(b_{c,j}, \rho(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i)^2) = -2(\mathbf{y}_i^T \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q})_c w_j(\mathbf{x}_i);$$

$$\text{coef}(1, \rho(\mathbf{y}_i, \hat{\mathbf{y}}_i)^2) = \mathbf{y}_i^T \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q} \mathbf{y}_i,$$

где c, c' — это элементы на строке c и в столбце c' соответственно. Следует отметить, что большинство коэффициентов будут нулевыми (поскольку веса не равны нулю только для тех узлов решетки, которые окружают конкретный \mathbf{x}_i). Для удобства полезно ввести обозначения:

$$f_{c,j;c',j'} = \sum_{i=0}^{n-1} w_j(\mathbf{x}_i) (\mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q})_{c,c'} w_{j'}(\mathbf{x}_i);$$

$$g_{c,j} = \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{y}_i^T \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q})_c w_j(\mathbf{x}_i);$$

$$h = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{y}_i^T \mathbf{Q}^T \mathbf{V}_i \mathbf{Q} \mathbf{y}_i.$$

Числа $f_{c,j;c',j'}$ формируют матрицу \mathbf{F} размера $3m \times 3m$, числа $g_{c,j}$ — вектор-столбец \mathbf{g} . Важно отметить, что по построению матрица \mathbf{F} симметричная. Матрица \mathbf{B} (размера $3 \times m$) может быть представлена в виде вектора-столбца \mathbf{b} . Тогда можно записать квадратичную форму для аппроксимации ошибки цветопередачи

$$\tilde{E}_{color}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{F} \mathbf{b} - 2\mathbf{g}^T \mathbf{b} + h.$$

Поскольку матрица \mathbf{F} положительно определенная, минимум может быть найден явно: $\mathbf{b}_{opt} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{g}$.

Данный метод является универсальным: если предполагается, что цветовое преобразование ориентировано на использование в автоматическом анализе, то вместо расстояния в ProLab можно использовать обычную евклидову норму в RGB-координатах, при этом задача существенно упрощается:

$$f_{c,j;c',j'} = \delta_{c,c'} \sum_{i=0}^{n-1} w_j(\mathbf{x}_i) w_{j'}(\mathbf{x}_i);$$

$$q_{c,j} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{y}_i^{(c)} w_j(\mathbf{x}_i);$$

$$h = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i;$$

$$\delta_{c,c'} = 1, \text{ если } c = c', \text{ иначе } 0.$$

Применение регуляризации в рамках разработанного метода

Для повышения эффективности регуляризации и решения перечисленных выше проблем предложены регуляризаторы S, K и ρ . Первые два способствуют обеспечению гладкости и более равномерной точности преобразования, третий отвечает за сохранение границ преобразования. Важной особенностью предлагаемого метода является то, что он позволяет получить

аналитическое решение. Для этого регуляризаторы также должны являться квадратичными формами.

Предложена квадратичная форма S , которая строится из соображений обеспечения сопоставимого размера соседних ячеек таблицы в пространстве образа. Идея основана на вычислении квадрата расстояния между двумя отмасштабированными векторами

$$\frac{b_{(j_R \cdot j_G \cdot j_B)} - b_{(j_R-1, j_G \cdot j_B)}}{a_{(j_R \cdot j_G \cdot j_B)} - a_{(j_R-1, j_G \cdot j_B)}} = \frac{b_{(j_R+1, j_G \cdot j_B)} - b_{(j_R \cdot j_G \cdot j_B)}}{a_{(j_R+1, j_G \cdot j_B)} - a_{(j_R \cdot j_G \cdot j_B)}}.$$

Если векторы коллинеарны, то расстояние между ними отражает изменение относительного размера между соответствующими ячейками. Если они имеют одинаковую длину, но при этом между ними есть некоторый угол φ , то квадрат расстояния d между ними будет пропорционален:

$$d^2 \sim \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

В общем случае, если они не коллинеарны и их длины не равны, будет получен некоторый промежуточный результат. Квадратичную форму для данного регуляризатора можно записать следующим образом:

$$S(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{S} \mathbf{b},$$

где \mathbf{S} — квадратная матрица размера $3m \times 3m$, в которой ненулевые только $9m$ значений (по три отмасштабированных вектора для вершин $-j, j, +j$ на каждое из трех направлений и на каждый из m узлов в таблице).

Предложена квадратичная форма K , направленная на то, чтобы ячейки таблицы в пространстве образа имели форму, близкую к параллелепипеду. Простое наблюдение состоит в том, что в параллелепипеде все четыре главные диагонали пересекаются в одной точке, являющейся центром каждой из них. Тогда можно предложить следующую идею: рассчитывать K как сумму квадратов расстояний между шестью парами центров диагоналей (и суммировать по всем ячейкам решетки). Если таблица выполняет линейное преобразование, то $K = 0$. Обратное в строгом смысле неверно: если два противоположных узла, находящихся на одной диагонали, будут сдвинуты одновременно в противоположные стороны, то получится некоторый многогранник, у которого по-прежнему все четыре главные диагонали будут пересекаться в одной точке. Тем не менее разумно предположить, что в реальной практике такие частные случаи бу-

дут очень редки и в целом предложенная регуляризация будет решать поставленную задачу.

Поскольку предложенный регуляризатор отражает геометрию решетки и связан с цветовыми различиями, разумно использовать евклидову метрику применительно к измеряемым расстояниям. Квадратичную форму можно записать в стандартном виде

$$K(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{K} \mathbf{b},$$

где \mathbf{K} — квадратная матрица размера $3m \times 3m$, элементы которой соответствуют квадратам расстояний между шестью парами центров диагоналей параллелепипедов соответствующих ячеек.

Для регуляризатора, обеспечивающего сохранение результата отображения в установленных границах в пространстве образа, за основу имеет смысл взять идею, изложенную в работе [15], при этом переформулировав в квадратичную форму:

$$\rho(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T \mathbf{H} \mathbf{b} + 2\mathbf{s}^T \mathbf{b} + t,$$

где \mathbf{H} — квадратная матрица размера $3m \times 3m$; \mathbf{s} и \mathbf{b} — векторы-столбцы, индексированные по парам (c, j) , c — координаты в пространстве образа, например: $c = \{X, Y, Z\}, j = 0, \dots, m-1$; t — вещественное число. Конкретные коэффициенты \mathbf{H} и \mathbf{s} зависят от сценария применения.

Полный функционал для минимизации

Таким образом, полный функционал, который нужно минимизировать в рамках построения оптимизированной таблицы поиска, осуществляющей цветовое преобразование, состоит из следующих частей:

- ошибки цветопередачи;
- регуляризирующих слагаемых, отвечающих за гладкость преобразования, форму ячеек, близкую к параллелепипедам, соблюдение границы цветового охвата.

Ошибка цветопередачи и регуляризирующие слагаемые с соответствующими весами $\lambda_S, \lambda_K, \lambda_\rho$ добавляются в общий функционал, приводя его к виду

$$E(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T (\mathbf{F} + \lambda_S \mathbf{S} + \lambda_K \mathbf{K} + \lambda_\rho \mathbf{H}) \mathbf{b} - 2(\mathbf{g} - \lambda_\rho \mathbf{s})^T \mathbf{b} + h + \lambda_\rho t.$$

Решение задачи минимизации находится в явном виде:

$$\mathbf{b}_{\text{opt}} = (\mathbf{F} + \lambda_S \mathbf{S} + \lambda_K \mathbf{K} + \lambda_\rho \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{g} - \lambda_\rho \mathbf{s}).$$

Значение функционала в точке оптимума выглядит следующим образом:

$$E(\mathbf{b}_{opt}) = h + \lambda_\rho t - (\mathbf{g} - \lambda_\rho \mathbf{s})^T \times \\ \times (\mathbf{F} + \lambda_S \mathbf{S} + \lambda_K \mathbf{K} + \lambda_\rho \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{g} - \lambda_\rho \mathbf{s}).$$

Определение значений весов в целом эвристическое при решении задачи конкретного типа для таблицы установленного размера и не представляет практической проблемы. Можно отметить, что при подборе весов следует ориентироваться на отношение суммарного вклада регуляризирующих слагаемых E_{reg} в значение полного функционала ошибки

$$E_{reg}(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^T (\lambda_S \mathbf{S} + \lambda_K \mathbf{K} + \lambda_\rho \mathbf{H}) \mathbf{b} + 2\lambda_\rho \mathbf{s} \mathbf{b} + \lambda_\rho t$$

к ошибке цветопередачи E_{color} . Эмпирически установленным рекомендуемым диапазоном для данного отношения является [0,05...0,4]. Если какой-то вид регуляризации не нужен, то его легко отключить, установив соответствующий вес равным нулю. Полученное выражение универсально с точки зрения используемой оценки цветового различия. В нем может применяться обычная евклидова норма, если нет задачи учета свойств зрения человека, или расстояние в равноконтрастном пространстве (например, ProLab), если такой учет необходим.

Описание и результаты экспериментального исследования

Для экспериментального исследования характеристик предложенного метода построения оптимизированных таблиц поиска были сформулированы следующие задачи.

1. Определить диапазон размеров оптимизированной таблицы, целесообразный для практического использования в колориметрических задачах.

2. Оценить гладкость полученного с помощью оптимизированной таблицы преобразования по сравнению с аналогами.

3. Провести сравнительное исследование точностных характеристик таблиц поиска, полученных с помощью предложенного метода, и оптимизированных таблиц поиска, полученных с помощью существующих известных методов.

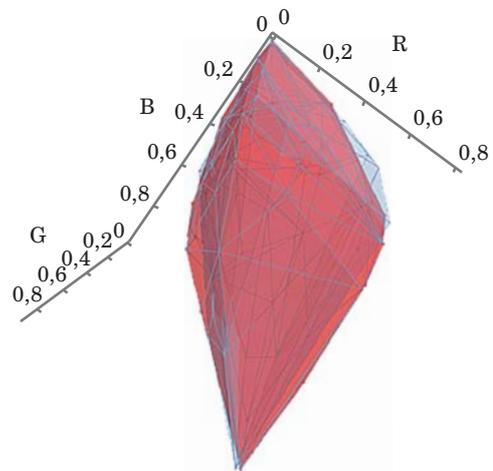
Для построения оптимизированной таблицы поиска и оценки точностных характеристик полученного преобразования необходимо сформировать наборы данных для построения таблицы и ее тестирования. Этой цели могут служить таблицы ColorChecker, содержащие спектральные характеристики цветов. Однако известные таблицы такого рода в первую очередь разработаны для целей цифровой фотографии и мало

подходят для построения таблиц. На рис. 3 показаны цветовые охваты двух наборов: расширенного набора Манселла и SG [22]. Видно, что охватываемая область сосредоточена в центре цветового пространства, содержит мало насыщенных цветов, асимметрична. Все это делает использование ColorChecker для всесторонней задачи оценки цветовых преобразований малопригодным. Альтернативой является построение так называемой спектральной сетки цветов — набора образцов, равномерно покрывающих цветовое пространство.

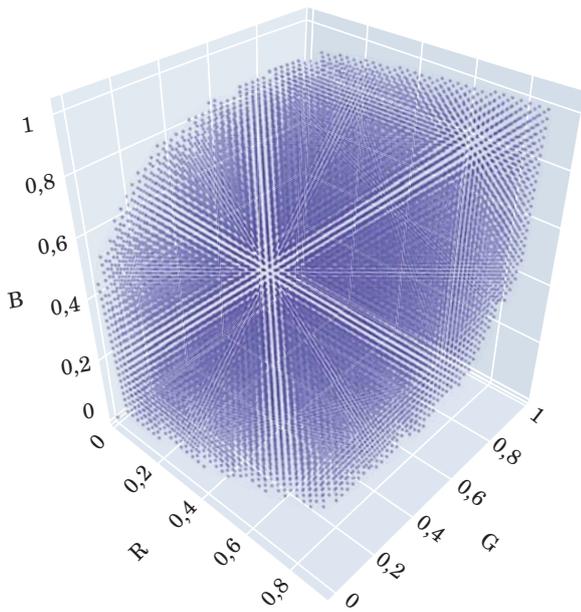
Спектральные сетки строятся с учетом характеристик конкретного сенсора с помощью различных методов [23, 24]. Использованный в данном исследовании метод [24] аппроксимирует спектральную характеристику цвета на основе значений тристимула (любого трехэлементного спецификатора цвета, такого как RGB) и известных характеристик сенсора. На рис. 4 приведен пример спектральной сетки, полученной для сенсора смартфона (тип освещения D65).

Пустые области пространства обусловлены цветовым охватом конкретного сенсора и характеристикой освещения. Исходя из практики, сетки размером $40 \times 40 \times 40$ точек хватает для довольно точной оценки преобразования.

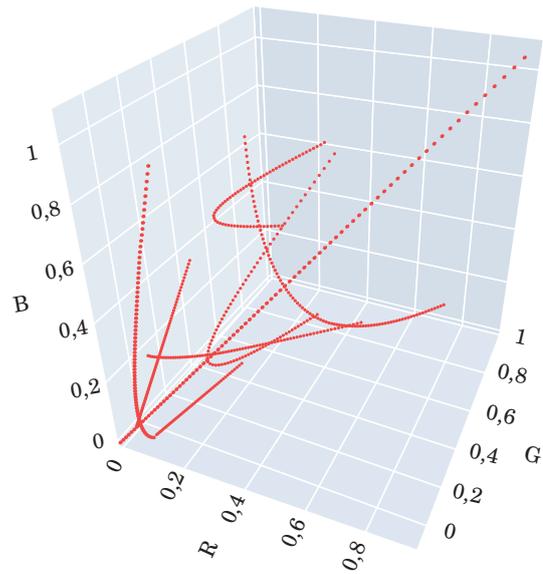
Для тестирования характеристик таблицы также могут быть использованы спектральные сетки с учетом обеспечения очевидного требования — несовпадения координат точек двух сеток. Однако в современной практике для тестирования точности цветокорректирующих преобразований широко используются цветовые градиенты. Последние представляют собой набор, который обычно состоит из 6–8 цветовых по-



■ **Рис. 3.** Выпуклые оболочки наборов цветов расширенного Манселла (красный) и SG (синий)
 ■ **Fig. 3.** Convex shells of the extended Mansell (red) and SG (blue) color sets



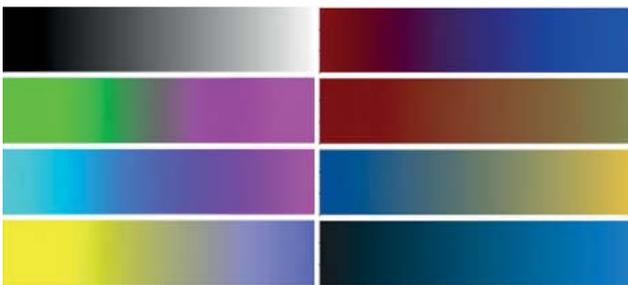
■ **Рис. 4.** Спектральная сетка для сенсора смартфона, тип освещения D65
 ■ **Fig. 4.** Spectral grid for smartphone sensor, D65 illumination type



■ **Рис. 6.** Точки цветовых градиентов в пространстве RGB
 ■ **Fig. 6.** Color gradient points in RGB space

лос. Использование подобного теста удобно для оценки плавности и точности преобразования. Градиенты характеризуются «сложной» формой и расположением в цветовом пространстве. Они могут располагаться вблизи границ и проходить через участки, где преобразование нелинейно. На рис. 5 приведен пример цветовых градиентов, использованных в исследовании, а на рис. 6 показано положение входящих в них цветов в пространстве RGB.

Для решения первой и второй задачи исследования были выбраны аналоги — преобразования, которые на данный момент используются в колориметрических задачах. Один из них — неоптимизированная таблица поиска. Именно неоптимизированные таблицы в основном используют сегодня для цветовых преобразований. В исследовании были задействованы



■ **Рис. 5.** Цветовые градиенты в sRGB
 ■ **Fig. 5.** Color gradients in sRGB

неоптимизированные таблицы трех размеров, наиболее часто используемых в цветовых преобразованиях: $N = 9$, $N = 17$ и $N = 33$. В качестве второго аналога было взято аналитическое рутполиномиальное преобразование, содержащее 18 коэффициентов [3], которое на данный момент является передовым решением и заменяет в устройствах устаревшее линейное преобразование (матричный цветокорректор, содержащий девять элементов).

Исследование характеристик предложенного метода и аналогов проводилось на примере решения задачи преобразования цветовых пространств из зависящего от устройства (сенсора) RGB в XYZ для следующих размеров оптимизированных таблиц: 5, 9, 17. В качестве обучающего набора использовалась спектральная сетка $40 \times 40 \times 40$, в качестве тестового множества — цветовые градиенты. Использовались следующие значения весов: $\lambda_S = 0,001$, $\lambda_K = 0,001$, $\lambda_p = 0,01$. В табл. 1 сведена информация, полученная для всех исследованных преобразований при использовании в качестве типа источника освещения D65. Ошибки соответствуют формуле цветовых различий CIEDE2000.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Начиная с размера $N = 9$, оптимизированная таблица обеспечивает удовлетворительные результаты, сопоставимые с неоптимизированной таблицей $N = 33$. В данном размере она превосходит конкурентов: рутполиномиальное преобразование 3×6 и неоптимизированную таблицу размером $N = 17$ — по

■ **Таблица 1.** Точность цветовых преобразований при отображении пространств RGB-XYZ для цветовых градиентов; тип освещения D65

■ **Table 1.** Accuracy of color transformations when displaying RGB-XYZ spaces for color gradients; illumination type D65

Преобразование		Ошибка					
		средняя	мин.	медиан.	90 %	95 %	макс.
Оптимизированная таблица	$N = 5$	1,2	0,04	1	2,35	2,47	8,94
	$N = 9$	0,68	0	0,56	1,43	1,74	3,43
	$N = 17$	0,43	0	0,3	0,94	1,46	2,27
Неоптимизированная таблица	$N = 9$	2,41	0,01	0,9	7,01	9,82	23,42
	$N = 17$	0,95	0	0,48	2,07	2,84	12,62
	$N = 33$	0,46	0	0,27	0,9	1,78	6,4
Рут-полиномиальное 3×6		1,58	0	0,93	4,59	5,61	8,25

всем основным оценкам ошибок. При этом важная для восприятия максимальная ошибка оптимизированной таблицы ниже, чем аналогичная оценка у неоптимизированной таблицы $N = 33$, а 95%-й перцентиль у данных преобразований практически совпадает. Средняя ошибка оптимизированной таблицы $N = 9$ выше, чем у неоптимизированной таблицы $N = 33$, в 1,5 раза, однако при этом она значительно ниже 1 по CIEDE2000, что соответствует практической неразличимости цветов [25].

Для оптимизированной таблицы $N = 9$, неоптимизированной таблицы $N = 17$ и рут-полиномиального преобразования 3×6 были исследованы характеристики при различных источниках освещения. Усредненные результаты сведены в табл. 2.

Для оценки гладкости была использована следующая методика. Для цветовых градиентов оценивалась первая производная ошибки преобразования (выраженная в единицах CIEDE2000). Для каждого преобразования подсчитывалось количество случаев для цветовых градиентов всех освещенностей, когда производная ошибки по отношению к известному

истинному значению превышает значение 2 (порог приемлемости [25]). По числу подобных случаев резкого изменения ошибки выставлялась оценка в баллах. Всего таким образом было рассмотрено 4000 точек (пять типов освещения, восемь цветовых градиентов по 100 цветов каждый). Ожидаемо лучший результат был получен для аналитического преобразования 3×6 (42 балла). Оптимизированная таблица $N = 9$ показала результат 66 баллов, а неоптимизированная получила наихудший результат – 96 баллов. Можно констатировать, что преимущество оптимизированной таблицы над неоптимизированной было достигнуто за счет соответствующей регуляризации.

В целом можно отметить, что точностные характеристики оптимизированной таблицы как минимум сопоставимы или превосходят характеристики неоптимизированной таблицы размером N , соответствующим следующему шагу ($N = 2^n + 1$) (т. е. оптимизированная размером $N = 9$ соответствует неоптимизированной размером $N = 17$, оптимизированная размером $N = 17$ соответствует неоптимизированной размером $N = 33$).

■ **Таблица 2.** Точность цветовых преобразований при отображении пространств RGB-XYZ для цветовых градиентов, усредненная по типам освещения (D65, D50, E, A28, FL.3.11, LED-RGB100)

■ **Table 2.** Accuracy of color transformations when displaying RGB-XYZ spaces for color gradients, averaged by illumination type (D65, D50, E, A28, FL.3.11, LED-RGB100)

Преобразование	Ошибка					
	средняя	мин.	медиан.	90 %	95 %	макс.
Оптимизированная таблица $N = 9$	0,68	0,02	0,54	1,48	1,77	4,43
Неоптимизированная таблица $N = 17$	0,97	0,002	0,44	2,25	3,37	13,89
Рут-полиномиальное 3×6	1,31	0	0,92	3,33	4,07	5,96

Для выполнения третьей задачи был проведен обзор публикаций, посвященных алгоритмам построения оптимизированных таблиц поиска [10–12, 14, 16, 26]. В открытом доступе не удалось найти реализации алгоритмов или достаточно структурированные и подробные их описания, позволяющие в точности провести моделирование. К тому же возникла проблема отсутствия соответствующих исходных данных для построения таблиц. Таким образом выяснилось, что полностью повторить эксперименты, указанные в публикациях, невозможно. Тем не менее в одном из самых цитируемых источников [26] результаты описаны достаточно детально, чтобы выполнить косвенное сравнение алгоритмов.

В [26] представлен ряд алгоритмов построения оптимизированных таблиц поиска. Среди них наиболее высокие точностные характеристики показал алгоритм RESOLVE, в котором осуществляется оптимизация как положения узлов в прообразе, так и значений в образе, т. е. фактически осуществляется самая полная возможная оптимизация. При этом в работе приведены результаты для решения типовой задачи преобразования цветовых пространств, зависящего от устройства (сканера) пространства RGB в CIE Lab. В исследовании не специфицирован конкретный набор данных, но указан его объем, а также точностные характеристики, которые показывают на нем неоптимизированные таблицы поиска определенных размеров. Кроме того, точно не указан тип источника освещения, однако в данном случае можно достаточно уверенно полагать, что при работе используется некоторый близкий к D50–D65 источник, что является стандартным для сканеров [27, 28]. Это дает возможность провести косвенным образом сравнительную оценку предложенного метода и RESOLVE. Очевидно, что неодинаковые КМОП-RGB-сенсоры, применяемые в настоящем ис-

следовании и в [26], имеют некоторые различия в спектральных характеристиках и определяют отличные друг от друга пространства RGB [29]. Однако логично предположить, что сами получаемые отображения из зависящего от устройства RGB в стандартное пространство CIE Lab принципиально похожи и сопоставимы по сложности.

В рамках исследования были выполнены следующие этапы.

1. С опорой на известные данные об объемах использованных в [26] обучающих наборов и на единство принципов построения неоптимизированных таблиц заданного размера были сформированы обучающие наборы, на которых неоптимизированные таблицы обеспечивали сопоставимую точность.

2. Для полученных наборов были рассчитаны результаты оптимизированных таблиц аналогичного размера, построенных по предложенному методу.

В исследовании в качестве типа освещения был использован D65 (стандартный для пространства CIE Lab). Приняты следующие значения весов: $\lambda_S = 0,0001$, $\lambda_K = 0,0001$, $\lambda_p = 0,005$. Реализация первого пункта позволяет говорить о том, что синтезированные наборы данных являются выборками из реализаций сопоставимых по сложности с задействованными в [26] преобразованиями. Данные сведены в табл. 3. В первой и второй строках приведены результаты для неоптимизированных таблиц, построенных в [26] и в данном исследовании соответственно.

Анализ обобщенных результатов исследования показывает, что предложенный метод обеспечивает лучшую точность цветового преобразования по сравнению с аналогом. Кроме того, аналог требует гораздо больше вычислительных ресурсов (поскольку производится оптимизация не только значений, но и узлов) и не имеет аналитического решения.

■ **Таблица 3.** Результаты оценки точности цветовых преобразований для различных наборов цветов и размеров таблиц
 ■ **Table 3.** Results of color transformation accuracy evaluation for different sets of colors and table sizes

Метод	Средняя ошибка (Delta E94)			95%-й перцентиль (Delta E94)		
	350 цветов, N = 6	1200 цветов, N = 8	2000 цветов, N = 12	350 цветов, N = 6	1200 цветов, N = 8	2000 цветов, N = 12
Неоптимизированная таблица [26]	3,14	2,69	6,58	6,90	2,26	6,22
Неоптимизированная таблица	3,04	2,37	8,89	8,42	1,73	4,72
RESOLVE [26]	2,13	1,55	3,46	4,69	1,27	3,36
Оптимизированная таблица	1,15	0,95	2,16	3,06	0,88	2,08

Обсуждение и выводы

Предложенный аналитический метод построения оптимизированной таблицы поиска для цветowych преобразований обладает следующими характеристиками.

1. Метод обеспечивает значительное повышение точности цветопередачи и, как следствие, снижение требований к размеру таблицы по сравнению с неоптимизированными таблицами. Оптимизированные таблицы по своим характеристикам соответствуют или превосходят неоптимизированные с размером, соответствующим следующему шагу n ($N = 2^n + 1$). При этом указанные характеристики обеспечиваются для всех основных типов источников освещения.

2. По сравнению с современными аналогами, применяемыми в телевизионных системах для цветowych преобразований, метод демонстрирует лучшее качество преобразования:

– средняя ошибка цветопередачи оптимизированной таблицы ($N = 9$) на тестовом наборе цветов ниже в 1,5 раза по сравнению с неоптимизированной таблицей поиска ($N = 17$) и в 2 раза по сравнению с рассмотренным рут-полиномиальным преобразованием;

– практически в 1,5–4 раза меньший 95%-й перцентиль ошибок на тестовом наборе по сравнению с аналогами;

– благодаря регуляризации предложенный метод на базе таблицы поиска размером $N = 9$ обеспечивает преобразование с показателем

гладкости в 1,5 раза лучше, чем у неоптимизированной таблицы размером $N = 17$.

3. Метод реализует построение оптимизированных таблиц, которые обеспечивают более высокую точность цветowych преобразований по сравнению с оптимизированными таблицами, построенными другими методами, и тем более с неоптимизированными таблицами, при этом предложенный метод отличается большей технологичностью:

– метод обеспечивает аналитическое получение решения, что выгодно отличает его от аналогичных методов, построенных на основе численной минимизации;

– точностные характеристики, превосходящие аналоги, обеспечиваются только за счет оптимизации значений, при этом решетка в образе остается регулярной и равномерной, что делает процесс построения таблицы быстрее, а саму таблицу существенно эффективнее и проще в использовании при реализации в реальной аппаратуре.

Финансовая поддержка

Исследование (а именно часть «Описание и результаты экспериментального исследования») выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках реализации научного проекта по соглашению № 075-15-2024-631.

Литература

1. Carter E. C., Schanda J. D., Hirschler R., Jost S., Luo M. R., Melgosa M., Ohno Y., Pointer M. R., Rich D. C., Viénot F., Whitehead L., Wold J. H. *Colorimetry*. 4th Ed. CIE Central Bureau, Vienna, 2018. doi:10.25039/TR.015.2018
2. Мотько А. А., Обухова Н. А. Метод перцептуальной цветокоррекции. *Информационно-управляющие системы*, 2023, № 3, с. 26–38. doi:10.31799/1684-8853-2023-3-26-38, EDN: ZZTURK
3. Zhao Y., Ferguson S., Zhou H., Elliott C., Rafferty K. Color alignment for relative color constancy via non-standard references. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2022, no. 31, pp. 6591–6604. doi:10.1109/TIP.2022.3214107
4. Suominen J., Egiazarian K. Camera color correction using splines. *Electronic Imaging*, 2024, pp. 165–165-6. doi:10.2352/EI.2024.36.16.COLOR-165
5. Wu P.-Ch., Lin C. A green and practical color photograph printing technology based on color difference model and human perception. *IEEE Access*, 2022, no. 10, pp. 649–666. doi:10.1109/ACCESS.2021.3138270
6. Zeng H., Cai J., Li L., Cao Z., Zhang L. Learning image-adaptive 3D lookup tables for high performance photo enhancement in real-time. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2022, no. 4, pp. 2058–2073. doi:10.1109/TPAMI.2020.3026740
7. Fei W., Wei W., Dan W., Guowang G. Color constancy via multi-scale region-weighted network guided by semantics. *Frontiers in Neurobotics*, 2022, no. 16, pp. 1–15. doi:10.3389/fnbot.2022.841426
8. Меженин А. В., Паук М. А. Снижение проявления визуальных артефактов при использовании трехмерных таблиц преобразования цветов с учетом расширенного динамического диапазона. *Культура и технологии*, 2023, т. 8, № 4, с. 204–211. doi:10.17586/2587-800X-2023-8-4-204-211
9. Kang H. R. *Color Technology for Electronic Imaging Devices*. SPIE Press, 1997. 369 p.
10. Reinhard J., Urban P. Perceptually optimizing color look-up tables. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2023, no. 32, pp. 403–414. doi:10.1109/TIP.2022.3228498
11. Srivastava S., Delp E., Ha T., Allebach J. Color management using optimal three-dimensional look-

- up tables. *Journal of Imaging Science and Technology*, 2010, vol. 54, iss. 3, pp. 030402-1–030402-14. doi:10.2352/J.ImagingSci.Technol.2010.54.3.030402
12. **Monga V., Bala R.** Algorithms for color look-up-table (LUT) design via joint optimization of node locations and output values. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Dallas, TX, USA, 2010, pp. 998–1001. doi:10.1109/ICASSP.2010.5495312
 13. **Martins J., Ning A.** *Engineering Design Optimization*. Cambridge University Press, 2021. 651 p. doi:10.1017/9781108980647
 14. **Garcia E., Gupta M.** Optimized construction of ICC profiles by lattice regression. *Final Program and Proceedings – IS and T/SID Color Imaging Conference*, 2010, pp. 353–358. doi:10.2352/CIC.2010.18.1.art00062.a
 15. **Ivanova A., Pasechnyuk D., Grishchenko D., Shulgin E., Gasnikov A., Matyukhin V.** Adaptive catalyst for smooth convex optimization. *Proceedings of 12th International Conference “Optimization and Applications” OPTIMA 2021*, Petrovac, Montenegro, September 27–October 1, 2021. Lecture Notes in Computer Science, 2021, vol. 13078, pp. 20–37. doi:10.1007/978-3-030-91059-4_2
 16. **Yang C., Jin M., Jia X., Xu Y., Chen Y.** Adaint: Learning adaptive intervals for 3D lookup tables on real-time image enhancement. *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2022, pp. 17501–17510. doi:10.1109/CVPR52688.2022.01700
 17. **Konovalenko I. A., Smagina A. A., Nikolaev D. P., Nikolaev P. P.** ProLab: perceptually uniform projective colour coordinate system. *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 133023–133042. doi:10.1109/ACCESS.2021.3115425
 18. **Behrens J.** *Deficiencies of the CIE-L*a*b* color space and introduction of the SRLAB2 color model*. <https://www.magnetkern.de/srlab2.pdf> (дата обращения: 02.09.2024).
 19. **Ottosson B.** *A perceptual color space for image processing*. <https://bottosson.github.io/posts/oklab> (дата обращения: 02.09.2024).
 20. **Sharma G., Wu W., Dalal N.** The CIEDE2000 color-difference formula: Implementation notes, supplementary test data, and mathematical observations. *Color Research & Application*, 2005, vol. 30, no. 1, pp. 21–30.
 21. **Mirjalili F., Luo M. R., Cui G., Morovic J.** Color-difference formula for evaluating color pairs with no separation Δ NS. *Journal of the Optical Society of America A*, 2019, no. 5, pp. 789–799. doi:10.1364/JOSAA.36.000789
 22. **Fernandez P. D. M., Guerrero-Pena F. A., Ren T. I., Leandro J. J. G.** Fast and robust multiple colorchecker detection using deep convolutional neural networks. *Image and Vision Computing*, 2019, no. 81, pp. 15–24. doi:10.1016/j.imavis.2018.11.001
 23. **Wenzel J., Hanika J.** A low-dimensional function space for efficient spectral upsampling. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics)*, 2019, vol. 38, no. 2, pp. 1–9. doi:10.1111/cgf.13626
 24. **Burns S.** *Generating reflectance curves from sRGB triplets*. <https://scottburns.us/reflectance-curves-from-srgb-10/> (дата обращения: 02.09.2024).
 25. **Kim A-Ri, Kim H.-S., Park S.** Measuring of the perceptibility and acceptability in various color quality measures. *Journal of the Optical Society of Korea*, 2011, vol. 15, no. 3, pp. 310–317. doi:10.3807/JOSK.2011.15.3.310
 26. **Monga V., Bala R., Mo X.** Design and optimization of color lookup tables on a simplex topology. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, vol. 21, no. 4, pp. 1981–1996. doi:10.1109/TIP.2011.2177848
 27. **Shen H. L., Xin J. H.** Spectral characterization of a color scanner based on optimized adaptive estimation. *J. Opt. Soc. Am.*, 2006, vol. 23, pp. 1566–1569. doi:10.1364/josaa.23.001566
 28. **Xinmeng Z., Guihua C., Xiukai R., Di C., Xiaohong G., Qifan C., Yuan Y., Manuel M., Suchitra S.** Spectral reflectance reconstruction based on wideband multi-illuminant imaging and a modified particle swarm optimization algorithm. *Optics Express*, 2024, vol. 32, no. 3, pp. 2942–2958. doi:10.1364/OE.506136
 29. **Nakamura J.** *Image Sensors and Signal Processing for Digital Still Cameras*. CRC Press, Inc., USA, 2005. 370 p.

UDC 654.1

doi:10.31799/1684-8853-2025-1-9-22

EDN: KRAQDO

Method for synthesizing optimized lookup tables for color transformationsA. A. Motyko^{a,b}, PhD, Tech., Associate Professor, orcid.org/0000-0003-4241-4298N. A. Obukhova^{a,b}, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0003-1953-2085, natalia172419@yandex.ruY. V. Yakubovich^a, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-9922-0593^aSaint-Petersburg State University, 7-9, Universitetskaya Emb., 199034, Saint-Petersburg, Russian Federation^bSaint-Petersburg Electrotechnical University «LETI», 5, Prof. Popov St., 197376, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Color transformations are widely used in television systems. One of the most popular and demanded ways to implement color transformations are three-dimensional lookup tables. At the same time, the existing methods of creating lookup tables are characterized with a number of drawbacks. **Purpose:** To develop an analytical method for constructing optimized three-dimensional lookup tables with specified properties (providing smoothness of transformation, possibility of construction at incomplete coverage of mapped spaces by initial data, etc.) and taking into account the existing drawbacks in regularization approaches. **Results:** We propose a

new analytical method for constructing optimized lookup tables for color transformations. The method provides obtaining optimized tables, which by their characteristics correspond or surpass the non-optimized tables with the size corresponding to the next step n ($N = 2^n + 1$) and at the same time provide better smoothness of transformation. Compared to state-of-the-art counterparts used in television systems for color transformations, the method exhibits 1.5 to 2 times lower mean error and 1.5 to 4 times lower 95% error percentile. The method provides high accuracy of color transformations and has good manufacturability due to obtaining an analytical solution. Providing better accuracy compared to similar methods of optimized table construction, the proposed method keeps the table lattice in the prototype regular and uniform, which makes the construction process faster, and the table itself is significantly more efficient and easier to use when implemented in real devices. **Practical relevance:** The method can be applied in the development of television systems where high color reproduction accuracy is required.

Keywords – color transformations, color correction, 3D lookup tables, optimized 3D LUTs, equal-contrast spaces.

For citation: Motyko A. A., Obukhova N. A., Yakubovich Y. V. Method for synthesizing optimized lookup tables for color transformations. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 9–22 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-9-22, EDN: KRAQDO

Financial support

The study (namely the part “Description and results of the experimental study”) was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation in the framework of a scientific project under agreement No. 075-15-2024-631.

References

- Carter E. C., Schanda J. D., Hirschler R., Jost S., Luo M. R., Melgosa M., Ohno Y., Pointer M. R., Rich D. C., Viénot F., Whitehead L., Wold J. H. *Colorimetry*. 4th Ed. CIE Central Bureau, Vienna, 2018. doi:10.25039/TR.015.2018
- Motyko A. A., Obukhova N. A. The method for perceptual color correction. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2023, no. 3, pp. 26–38 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2023-3-26-38, EDN: ZZTURK
- Zhao Y., Ferguson S., Zhou H., Elliott C., Rafferty K. Color alignment for relative color constancy via non-standard references. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2022, no. 31, pp. 6591–6604. doi:10.1109/TIP.2022.3214107
- Suominen J., Egiazarian K. Camera color correction using splines. *Electronic Imaging*, 2024, pp. 165-1-165-6. doi:10.2352/EI.2024.36.16.COLOR-165
- Wu P.-Ch., Lin C. A green and practical color photograph printing technology based on color difference model and human perception. *IEEE Access*, 2022, no. 10, pp. 649–666. doi:10.1109/ACCESS.2021.3138270
- Zeng H., Cai J., Li L., Cao Z., Zhang L. Learning image-adaptive 3D lookup tables for high performance photo enhancement in real-time. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2022, no. 4, pp. 2058–2073. doi:10.1109/TPAMI.2020.3026740
- Fei W., Wei W., Dan W., Guowang G. Color constancy via multi-scale region-weighted network guided by semantics. *Frontiers in Neurobotics*, 2022, no. 16, pp. 1–15. doi:10.3389/fnbot.2022.841426
- Mejenin A. V., Pauk M. A. Reducing visual artifacts when using 3d-lut with usage of high dynamic range technology. *International Culture & Technology Studies*, 2023, vol. 8, no. 4, pp. 204–211 (In Russian). doi:10.17586/2587-800X-2023-8-4-204-211
- Kang H. R. *Color Technology for Electronic Imaging Devices*. SPIE Press, 1997. 369 p.
- Reinhard J., Urban P. Perceptually optimizing color look-up tables. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2023, no. 32, pp. 403–414. doi:10.1109/TIP.2022.3228498
- Srivastava S., Delp E., Ha T., Allebach J. Color management using optimal three-dimensional look-up tables. *Journal of Imaging Science and Technology*, 2010, vol. 54, iss. 3, pp. 030402-1–030402-14. doi:10.2352/J.ImagingSci.Tech.2010.54.3.030402
- Monga V., Bala R. Algorithms for color look-up-table (LUT) design via joint optimization of node locations and output values. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Dallas, TX, USA, 2010, pp. 998–1001. doi:10.1109/ICASSP.2010.5495312
- Martins J., Ning A. *Engineering Design Optimization*. Cambridge University Press, 2021. 651 p. doi:10.1017/9781108980647
- Garcia E., Gupta M. Optimized construction of ICC profiles by lattice regression. *Final Program and Proceedings – IS and T/SID Color Imaging Conference*, 2010, pp. 353–358. doi:10.2352/CIC.2010.18.1.art00062.a
- Ivanova A., Pasechnyuk D., Grishchenko D., Shulgin E., Gasnikov A., Matyukhin V. Adaptive catalyst for smooth convex optimization. *Proceedings of 12th International Conference “Optimization and Applications” OPTIMA 2021*. Lecture Notes in Computer Science, 2021, vol. 13078, pp. 20–37. doi:10.1007/978-3-030-91059-4_2
- Yang C., Jin M., Jia X., Xu Y., Chen Y. Adaint: Learning adaptive intervals for 3D lookup tables on real-time image enhancement. *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2022, pp. 17501–17510. doi:10.1109/CVPR52688.2022.01700
- Konovaleiko I. A., Smagina A. A., Nikolaev D. P., Nikolaev P. P. ProLab: Perceptually uniform projective colour coordinate system. *IEEE Access*, 2021, vol. 9, pp. 133023–133042. doi:10.1109/ACCESS.2021.3115425
- Behrens J. *Deficiencies of the CIE-L*a*b* color space and introduction of the SRLAB2 color model*. Available at: <https://www.magnetkern.de/srlab2.pdf> (accessed 02 October 2024).
- Ottosson B. *A perceptual color space for image processing*. Available at: <https://bottosson.github.io/posts/oklab> (accessed 02 October 2024).
- Sharma G., Wu W., Dalal N. The CIEDE2000 color-difference formula: Implementation notes, supplementary test data, and mathematical observations. *Color Research & Application*, 2005, vol. 30, no. 1, pp. 21–30.
- Mirjalili F., Luo M. R., Cui G., Morovic J. Color-difference formula for evaluating color pairs with no separation ΔENS. *Journal of the Optical Society of America A*, 2019, no. 5, pp. 789–799. doi:10.1364/JOSAA.36.000789
- Fernandez P. D. M., Guerrero-Pena F. A., Ren T. I., Leandro J. J. G. Fast and robust multiple colorchecker detection using deep convolutional neural networks. *Image and Vision Computing*, 2019, no. 81, pp. 15–24. doi:10.1016/j.imavis.2018.11.001
- Wenzel J., Hanika J. A low-dimensional function space for efficient spectral upsampling. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Eurographics)*, 2019, vol. 38, no. 2, pp. 1–9. doi:10.1111/cgf.13626
- Burns S. *Generating reflectance curves from sRGB triplets*. Available at: <https://scottburns.us/reflectance-curves-from-srgb-10/> (accessed 02 October 2024).
- Kim A.-Ri, Kim H.-S., Park S. Measuring of the perceptibility and acceptability in various color quality measures. *Journal of the Optical Society of Korea*, 2011, vol. 15, no. 3, pp. 310–317. doi:10.3807/JOSK.2011.15.3.310
- Monga V., Bala R., Mo X. Design and optimization of color lookup tables on a simplex topology. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2012, vol. 21, no. 4, pp. 1981–1996. doi:10.1109/TIP.2011.2177848
- Shen H. L., Xin J. H. Spectral characterization of a color scanner based on optimized adaptive estimation. *J. Opt. Soc. Am.*, 2006, vol. 23, pp. 1566–1569. doi:10.1364/josaa.23.001566
- Xinmeng Z., Guihua C., Xiukai R., Di C., Xiaohong G., Qifan C., Yuan Y., Manuel M., Suchitra S. Spectral reflectance reconstruction based on wideband multi-illuminant imaging and a modified particle swarm optimization algorithm. *Optics Express*, 2024, vol. 32, no. 3, pp. 2942–2958. doi:10.1364/OE.506136
- Nakamura J. *Image Sensors and Signal Processing for Digital Still Cameras*. CRC Press, Inc., USA, 2005. 370 p.



Алгоритм построения матриц, уменьшающих расстояние кода

А. А. Воднев^а, аспирант, orcid.org/0009-0002-3539-4292, vodnev.98@mail.ru

^аМосковский институт электроники и математики им. А. Н. Тихонова Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», Таллинская ул., 34, Москва, 123458, РФ

Введение: уменьшение кодового расстояния представляет собой важный инструмент для решения некоторых задач в теории информации и криптографии. Например, в криптографических кодовых системах, таких как система Мак-Элиса, снижение кодового расстояния напрямую влияет на уменьшение длины открытого ключа, что является критически важным фактором для повышения эффективности и применимости кодовых криптосистем. **Цель:** разработать алгоритм построения матриц, способный эффективно уменьшать расстояние кода. **Результаты:** предложен итерационный алгоритм, который формирует ряд маскирующих матриц, успешно уменьшающих расстояние заданного кода. Для проверки изложенного подхода был выбран код Боуза – Чоудхури – Хоквингема и криптографическая система Мак-Элиса. Проведен ряд экспериментов, показывающих эффективность разработанного алгоритма. Суть экспериментов заключалась в применении к коду Боуза – Чоудхури – Хоквингема разработанного алгоритма, после чего полученный код внедрялся в систему Мак-Элиса. Полученная криптосистема подвергалась атакам на основе декодирования по информационным совокупностям. Результаты экспериментов показали, что к преобразованным кодам неприменима атака на основе декодирования по информационным совокупностям, а вес порождающей матрицы нового кода, которая является частью открытого ключа, стал меньше. **Практическая значимость:** невозможность применить декодирование по информационным совокупностям позволяет уменьшить объем открытого ключа в криптосистеме, что представляет значительный интерес для практики использования кодовых криптосистем. **Обсуждение:** приложение алгоритма не ограничивается только криптографией. Он может быть применен для преобразования каналов передачи данных, обладающих памятью. Отметим, что для полноценного внедрения матриц, уменьшающих расстояние кода, в криптографические системы необходима проверка декодируемости вектора ошибок после обратного преобразования, что является предметом дальнейших исследований.

Ключевые слова – корректирующие коды, кодовое расстояние, криптография, система Мак-Элиса, декодирование по информационным совокупностям, уменьшение размера ключа.

Для цитирования: Воднев А. А. Алгоритм построения матриц, уменьшающих расстояние кода. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 1, с. 23–28. doi:10.31799/1684-8853-2025-1-23-28, EDN: IOKUXY

For citation: Vodnev A. A. Algorithm for constructing matrices that reduce code distance. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 23–28 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-23-28, EDN: IOKUXY

Введение

В криптографии есть два основных типа систем – алгебраические и кодовые. Алгебраические криптосистемы основаны на задаче факторизации [1] и вычисления дискретного логарифма [2]. Кодовые системы основаны на операциях линейной алгебры и методах помехоустойчивого кодирования [3]. Примером такой системы является система Мак-Элиса – криптографическая система с открытым ключом, основанная на проблеме декодирования кодов, корректирующих ошибки. Идея системы Мак-Элиса заключается в том, что вектор ошибки не меняет своего веса после применения обратной матрицы перестановок к шифротексту. Поэтому законному пользователю не нужно знать вектор ошибки для расшифровки, поскольку любой вектор ошибки с весом меньше половины кодового расстояния декодируется кодом с использованием того же алгоритма. Фактически безопасность системы основана на сложности декодирования для линейного кода

с произвольной структурой. В работе [4] доказано, что декодирование произвольного линейного кода является NP-трудной задачей. Однако, несмотря на то, что кодовые криптосистемы имеют некоторые преимущества, особенно в том, что касается выигрыша по времени шифрования/дешифрования [5], а также устойчивости к декодированию в постквантовый период [6, 7], они имеют и недостатки.

Открытый ключ, например для системы Мак-Элиса, как правило, имеет большую длину по сравнению с алгебраическими системами. Более того, система Мак-Элиса подвержена атакам, связанным с декодированием по информационным совокупностям (Information-Set Decoding, ISD) [8]. Среднее число попыток найти информационный набор без ошибок значительно меньше, чем для полного перебора по всем векторам ошибок. Таким образом, для достижения необходимого диапазона безопасности криптосистемы Мак-Элиса требуются коды с большей длиной n . В частности, Мак-Элис предложил использовать

код Гоппы (1024, 524, 101), исправляющий $t = 50$ ошибок, для которого длина открытого ключа составляет 536 576 [9].

Однако исследование кодовых криптосистем позволило существенно уменьшить размер открытого ключа [10, 11], а разработка новых методов решения задачи факторизации [12] привела к тому, что размер открытого ключа алгебраических систем увеличился. В результате размеры открытых ключей для разного типа систем стали соизмеримыми [13]. Помимо этого, кодовые криптосистемы выполняют меньше операций и опираются на линейную алгебру, которая реализуется эффективнее, чем арифметические операции. Таким образом, кодовые криптосистемы лучше подходят для реализации «легкой криптографии», которая способна обеспечить достаточный уровень безопасности в условиях ограниченных вычислительных систем [14, 15].

Существует множество подходов к уменьшению ключей кодовой криптосистемы [16–18], одним из возможных способов служит использование преобразующих матриц, не являющихся перестановками. В этом случае расстояние преобразованного кода может быть меньше, чем у исходного, и тогда преобразованный код не будет исправлять те ошибки, которые мог исправить исходный. В статье предлагается алгоритм получения преобразований, позволяющих уменьшить расстояние исходного кода. Идея уменьшения минимального кодового расстояния может быть полезна сразу по нескольким направлениям: во-первых, уменьшение размера открытого ключа, во-вторых, защита от атак, основанных на декодировании методом информационных совокупностей. Разработанный итерационный алгоритм маскирующих матриц формирует матрицу, которая при умножении на порождающую матрицу кода делает вес некоторых строк малым. При попытке декодировать полученный код методом информационных совокупностей будем получать ошибки, особенно если количество уменьшенных строк велико.

Алгоритм может быть применен не только для криптографических систем, но и, например, для построения более надежных каналов с памятью [19], а также в других задачах, требующих сокращения передаваемой информации без потери корректирующих свойств [20].

Формирование маскирующей матрицы и внедрение алгоритма в систему Мак-Элиса

Задачу уменьшения минимального кодового расстояния до величины l можно решить, уменьшив в порождающей матрице одну или несколь-

ко строк до веса l . После формирования порождающей матрицы G_0 кода Боуза – Чоудхури – Хоквингхема (БЧХ) применим итерационный алгоритм, который уменьшит строки.

Алгоритм:

1) формируем маскирующую матрицу M_1 для заданной строки G_0 ;

2) перемножаем матрицы G_0 и M_1 , получаем GpM_1 ;

3) формируем маскирующую матрицу M_2 для заданной строки GpM_1 ;

4) перемножаем матрицы GpM_1 и M_2 и т. д.

Алгоритм продолжается до тех пор, пока не будет достигнут лимит на уменьшение строк либо не будет достигнуто требуемое количество «коротких» строк в порождающей матрице.

Умножение на маскирующую матрицу порождает новый код с уменьшенным расстоянием. Чем больше в порождающей матрице кода строк минимальной длины, тем больше слов минимального веса получаем в спектре всех слов для этого кода.

Алгоритм формирования маскирующей матрицы:

1) определяем позиции единиц заданной строки кода;

2) идем по позициям порождающей матрицы кода: если номер строки и номер столбца (большой или равный номеру строки) есть в выделенных позициях, то ставим на эту позицию единицу, в противном случае — ноль. Количество единиц в строке ограничено заданным параметром;

3) на остальных позициях ставим строки, как в единичной матрице.

Алгоритм разработан таким образом, что матрица, полученная на каждой итерации, не является вырожденной. Следовательно, для восстановления исходного кода достаточно найти матрицы, обратные M_1 , M_2 и т. д.

Внедрение алгоритма в криптосистему происходит следующим образом:

1) так как SG_0 дает тот же набор кодовых слов, что и G_0 , то матрицей S можно пренебречь;

2) матрица P заменяется маскирующей матрицей M .

Получаем криптосистему вида

$$y = xG_0M + e.$$

Матрица M получена итерационным алгоритмом: $M = M_1M_2\dots M_{k'}$, где k' — количество строк, вес которых необходимо изменить.

Если вес вектора ошибок e брать как подходящий для кода G_0 , то новый код G_0M при условии, что матрица M уменьшает вес достаточно большого количества строк G_0 , с высокой вероятностью не сможет исправить все наложенные ошибки. Только легальный пользователь, знающ-

Литература

1. Rivest R. L., Shamir A., Adleman L. M. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM*, 1978, vol. 21, no. 2, pp. 120–126. doi.org/10.1145/359340.359342
2. El Gamal T. A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1985, vol. 31, no. 4, pp. 469–472. doi.org/10.1109/TIT.1985.1057074
3. Рацев С. М., Череватенко О. И., Чернявская В. А. О некоторых криптосистемах, основанных на алгебраических кодах. *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, 2021, т. 27, № 1, с. 62–73. doi.org/10.18287/2541-7525-2021-27-1-62-73
4. Berlekamp E., McEliece R., van Tilborg H. On the inherent intractability of certain coding problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1978, vol. 24, no. 3, pp. 384–386. doi.org/10.1109/TIT.1978.1055873
5. Veron P. Code based cryptography and steganography. *5th International Conference, CAI 2013*, Porquerolles, France, 3–6 September, 2013, pp. 9–46. doi.org/10.1007/978-3-642-40663-8_5
6. Ovchinnikov A. A. The variant of post-quantum cryptosystem based on burst-correcting codes and on the complete decoding problem. *Информационно-управляющие системы*, 2022, № 3, с. 45–54. doi:10.31799/1684-8853-2022-3-45-54
7. Bavdekar R., Chopde E. J., Bhatia A., Tiwari K., Daniel S. J., Atul. Post quantum cryptography: Techniques, challenges, standardization, and directions for future research. *Cryptography and Security (cs.CR)*, 2202. doi.org/10.48550/arXiv.2202.02826
8. Давыдов В. В., Беляев В. В., Кустов Е. Ф., Леевик А. Г., Беззатеев С. В. Современные вариации криптосистем Мак-Элиса и Нидеррайтера. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2022, т. 22, № 2, с. 324–331. doi:10.17586/2226-1494-2022-22-2-324-331, EDN: CFSCVT
9. McEliece R. J. *A Public-Key Cryptosystem Based on Algebraic Coding Theory*. DSN Progress Report, 1978, pp. 42–44.
10. Berger T. P., Cayrel P. L., Gaborit P., Otmani A. Reducing key length of the McEliece cryptosystem. *Second International Conference on Cryptology in Africa*, Gammarth, Tunisia, 21–25 June, 2009, pp. 77–97. doi.org/10.1007/978-3-642-02384-2_6
11. Faugère J. C., Otmani A., Perret L., Tillich J. P. Algebraic cryptanalysis of McEliece variants with compact keys. *29th Annual International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques*, French Riviera, May 30–June 3, 2010, pp. 279–298. doi.org/10.1007/978-3-642-13190-5_14
12. Kocher P. C. Timing attacks on implementations of Diffie – Hellman, RSA, DSS, and other systems. *16th Annual International Cryptology Conference*, Santa Barbara, California, USA, 18–22 August, 1996, pp. 104–113. doi.org/10.1007/3-540-68697-5_9
13. Barker E. *NIST Special Publication 800-57. Part 1: Revision 4, Recommendation for Key Management, Part 1: General*. National Inst. of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, USA, 2016. doi.org/10.6028/NIST.SP.800-57pt1r4
14. Eisenbarth T., Kumar S., Paar C., Poschmann A., Uhsadel L. A survey of lightweight-cryptography implementations. *IEEE Design & Test of Computers*, 2007, vol. 24, no. 6, pp. 522–533. doi.org/10.1109/MDT.2007.178
15. Ivanov F., Krouk E., Kreshchuk A. On the lightweight McEliece cryptosystem for low-power devices. *2019 XVI International Symposium “Problems of Redundancy in Information and Control Systems” (REDUNDANCY)*, Moscow, Russia, 21–25 October, 2019, pp. 133–138. doi.org/10.1109/REDUNDANCY48165.2019.9003324
16. Zyablov V. V., Ivanov F. I., Krouk E. A., Sidorenko V. R. On new problems in asymmetric cryptography based on error-resistant coding. *Problems of Information Transmission*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 184–201. doi:10.1134/S0032946022020077
17. Ivanov F., Krouk E., Kabatiansky G., Rumenko N. New code-based cryptosystem. *8th International Workshop “Code-Based Cryptography” (CBCrypto 2020)*, Zagreb, Croatia, 9–10 May, 2020, LNCS, vol. 12087, pp. 41–49 doi:10.1007/978-3-030-54074-6_3
18. Красавин А. А. Использование модифицированной $(U|U+V)$ -конструкции в криптосистеме McEliece. *Труды МФТИ*, 2018, т. 10, № 2, с. 109–113. EDN: XTWBRZ
19. Сухоруков А. С. Пропускная способность дискретного многомерного канала связи с памятью. *Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт*, 2018, т. 12, № 3, с. 13–21. doi:10.24411/2072-8735-2018-10048, EDN: ХОНИУР
20. Кудряшова А. Ю. Минимизация искажений сигнала при локально-оптимальном способе цифрового преобразования. *Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт*, 2020, т. 14, № 5, с. 27–34. doi:10.36724/2072-8735-2020-14-5-27-34, EDN: AIOUOJ

UDC 003.26, 519.725.2

doi:10.31799/1684-8853-2025-1-23-28

EDN: IOKUXY

Algorithm for constructing matrices that reduce code distanceA. A. Vodnev^a, Post-Graduate Student, orcid.org/0009-0002-3539-4292, vodnev.98@mail.ru^aHigher School of Economics, Tikhonov Moscow Institute of Electronics and Mathematics, 34, Tallinskaya St., 123458, Moscow, Russian Federation

Introduction: Reducing code distance is an important tool for addressing certain problems in information theory and cryptography. For example, in cryptographic coding systems such as McEliece, reducing the code distance directly affects the reduction of the public key length, which is a critically important factor for increasing the efficiency and applicability of coding-based cryptosystems. **Purpose:** To develop a matrix construction algorithm which is capable to effectively reduce code distance. **Results:** We propose an iterative algorithm that generates a series of masking matrices, successfully reducing the distance of the given code. To validate this approach, we choose the BCH code and the McEliece cryptographic system. We have conducted a series of experiments demonstrating the effectiveness of the developed algorithm. The experiments involve applying the developed algorithm to the BCH code, after which the resulting code is integrated into the McEliece system. The resulting cryptosystem is subjected to attacks based on information set decoding. The experimental results show that the transformed codes are not susceptible to attacks based on information set decoding, and the weight of the generator matrix of the new code, which is part of the public key, is reduced. **Practical relevance:** The inability to apply information set decoding makes it possible to reduce the public key size in a cryptosystem, which is of significant interest for the practical application of coding-based cryptosystems. **Discussion:** The application of this algorithm is not limited to cryptography. The proposed approach can also be applied to transforming communication channels with memory. It is important to note that, for the full integration of matrices that reduce code distance into cryptographic systems, verification of the error vector's decodability after applying the reverse transformation is necessary, which is a subject for further research.

Keywords – error-correcting codes, code distance, cryptography, McEliece system, information set decoding, key size reduction.

For citation: Vodnev A. A. Algorithm for constructing matrices that reduce code distance. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 23–28 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-23-28, EDN: IOKUXY

Financial support

The article was prepared as a result of research conducted within the framework of the Fundamental Research Program of the National Research University Higher School of Economics (HSE).

References

- Rivest R. L., Shamir A., Adleman L. M. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Communications of the ACM*, 1978, vol. 21, no. 2, pp. 120–126. doi:10.1145/359340.359342
- El Gamal T. A public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1985, vol. 31, no. 4, pp. 469–472. doi:10.1109/TIT.1985.1057074
- Ratseev S. M., Cherevatenko O. I., Chernyavskaya V. A. On some cryptosystems based on algebraic codes. *Vestnik of Samara University. Natural Science Series*, 2021, vol. 27, no. 1, pp. 62–73. doi:10.18287/2541-7525-2021-27-1-62-73 (In Russian).
- Berlekamp E., McEliece R., van Tilborg H. On the inherent intractability of certain coding problems. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1978, no. 24(3), pp. 384–386.
- Veron P. Code based cryptography and steganography. *5th International Conference, CAI 2013*, Porquerolles, France, 3–6 September, 2013, pp. 9–46. doi:10.1007/978-3-642-40663-8_5
- Ovchinnikov A. A. The variant of post-quantum cryptosystem based on burst-correcting codes and on the complete decoding problem. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2022, no. 3, pp. 45–54. doi:10.31799/1684-8853-2022-3-45-54
- Bavdekar R., Chopde E. J., Bhatia A., Tiwari K., Daniel S. J., Atul. Post quantum cryptography: Techniques, challenges, standardization, and directions for future research. *Cryptography and Security (cs.CR)*, 2202. doi:10.48550/arXiv.2202.02826
- Davydov V. V., Beliaev V. V., Kustov E. F., Leevik A. G., Bezzateev S. V. Modern variations of McEliece and Niederreiter cryptosystems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 2, pp. 324–331 (In Russian). doi:10.17586/2226-1494-2022-22-2-324-331, EDN: CFSCVT
- McEliece R. J. *A Public-Key Cryptosystem Based on Algebraic Coding Theory*. DSN Progress Report, 1978, pp. 42–44.
- Berger T. P., Cayrel P. L., Gaborit P., Otmani A. Reducing key length of the McEliece cryptosystem. *Second International Conference on Cryptology in Africa*, Gammarrh, Tunisia, 21–25 June, 2009, pp. 77–97. doi:10.1007/978-3-642-02384-2_6
- Faugère J. C., Otmani A., Perret L., Tillich J. P. Algebraic cryptanalysis of McEliece variants with compact keys. *29th Annual International Conference on the Theory and Applications of Cryptographic Techniques*, French Riviera, May 30–June 3, 2010, pp. 279–298. doi:10.1007/978-3-642-13190-5_14
- Kocher P. C. Timing attacks on implementations of Diffie–Hellman, RSA, DSS, and other systems. *16th Annual International Cryptology Conference*, Santa Barbara, California, USA, 18–22 August, 1996, pp. 104–113. doi:10.1007/3-540-68697-5_9
- Barker E. *NIST Special Publication 800-57. Part 1: Revision 4, Recommendation for Key Management, Part 1: General*. National Inst. of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, USA, 2016. doi:10.6028/NIST.SP.800-57pt1r4
- Eisenbarth T., Kumar S., Paar C., Poschmann A., Uhsadel L. A survey of lightweight-cryptography implementations. *IEEE Design & Test of Computers*, 2007, vol. 24, no. 6, pp. 522–533. doi:10.1109/MDT.2007.178
- Ivanov F., Krouk E., Kreshchuk A. On the lightweight McEliece cryptosystem for low-power devices. *2019 XVI International Symposium "Problems of Redundancy in Information and Control Systems" (REDUNDANCY)*, Moscow, Russia, 21–25 October, 2019, pp. 133–138. doi:10.1109/REDUNDANCY48165.2019.9003324
- Zyablov V. V., Ivanov F. I., Krouk E. A., Sidorenko V. R. On new problems in asymmetric cryptography based on error-resistant coding. *Problems of Information Transmission*, 2022, vol. 58, no. 2, pp. 184–201. doi:10.1134/S0032946022020077
- Ivanov F., Krouk E., Kabatiansky G., Rumenco N. New code-based cryptosystem. *8th International Workshop "Code-Based Cryptography" (CBCrypto 2020)*, Zagreb, Croatia, 9–10 May, 2020, LNCS, vol. 12087, pp. 41–49. doi:10.1007/978-3-030-54074-6_3
- Krasavin A. A. (U|U+V) modification for McEliece cryptosystem. *Proceedings of MIPT*, 2018, vol. 10, no. 2, pp. 109–113 (In Russian). EDN: XTWBRZ
- Sukhorukov A. S. Bandwidth multidimensional discrete communication channel with memory. *T-Comm*, 2018, vol. 12, no. 3, pp. 13–21 (In Russian). doi:10.24411/2072-8735-2018-10048, EDN: XOHIUP
- Kudryashova A. Yu. Minimizing signal distortions at the most optimal choice of digital conversion method. *T-Comm*, 2020, vol. 14, no. 5, pp. 27–34 (In Russian). doi:10.36724/2072-8735-2020-14-5-27-34, EDN: AIUOUJ



Оценка эффективности использования марковской метрики при декодировании в каналах с памятью

А. М. Вересова^а, аспирант, orcid.org/0000-0002-3792-9249, a.veresova@guap.ru

^аСанкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Б. Морская ул., 67, Санкт-Петербург, 190000, РФ

Введение: современные методы помехоустойчивого кодирования вплотную приблизились к теоретическим пределам, установленным шенноновскими теоремами кодирования. Тем не менее эти пределы могут быть увеличены при учете особенностей конфигурации ошибок в канале. Таким образом, актуальной является задача исследования методов передачи информации по каналам с памятью. **Цель:** провести анализ условий согласованности марковской метрики с простым марковским каналом, исследовать возможность ее применимости в более общих марковских моделях. **Результаты:** проведен анализ параметров марковского канала и длин кодирования, при которых марковская метрика является согласованной. Показано, что для большого набора параметров, представляющих практический интерес, диапазон согласованности мал или отсутствует. Предложена модификация алгоритма Витерби для использования марковской метрики. Проведены эксперименты по оценке вероятности ошибки декодирования по минимуму расстояния для блоковых кодов малой длины (несколько десятков бит) и сверточных кодов умеренной длины (несколько сотен бит). Результаты показывают, что марковская метрика позволяет значительно снизить вероятность ошибки декодирования в марковском канале даже при ее несогласованности. Однако при переходе от марковского канала к более общим моделям (канал Гилберта) выигрыш достаточно быстро исчезает. **Практическая значимость:** разработанный декодер Витерби с марковской метрикой может позволить достигать вероятности ошибки вплоть до 10^{-2} – 10^{-4} в марковском канале, где декодирование в метрике Хэмминга практически бесполезно. **Обсуждение:** полученные результаты показывают, что требование согласованности метрики не является обязательным для достижения малых вероятностей ошибки. Таким образом, возникает задача разработки правила декодирования для каналов, в которых шум описывается скрытой марковской моделью.

Ключевые слова – каналы с памятью, метрики, декодирование по максимуму правдоподобия, декодирование Витерби, канал с конечным числом состояний.

Для цитирования: Вересова А. М. Оценка эффективности использования марковской метрики при декодировании в каналах с памятью. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 1, с. 29–41. doi:10.31799/1684-8853-2025-1-29-41, EDN: JQIBMZ

For citation: Veresova A. M. Performance evaluation of decoding in channels with memory with the use of a Markov metric. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 29–41 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-29-41, EDN: JQIBMZ

Введение

В современных системах обработки, передачи, хранения информации одной из важнейших задач является задача обеспечения целостности информации, т. е. ее устойчивости к воздействию шумовых воздействий, рассматриваемых, как правило, как случайный процесс. Одним из основных инструментов обеспечения целостности является внесение информационной избыточности с использованием математических методов теории помехоустойчивого кодирования [1, 2]. Однако на сегодня практические характеристики современных кодов, исправляющих ошибки (турбокодов, низкоплотностных кодов, полярных кодов), вплотную приблизились к теоретически достижимым, в частности к пропускной способности канала, введенной К. Шенноном в середине XX в.

Тем не менее дальнейшее улучшение таких характеристик систем связи, как скорость передачи информации, вероятность доставки или

вероятность ошибки декодирования, возможно, если учитывать особенности ошибок, происходящих в канале связи. Так, известно, что пропускная способность каналов с памятью, в которых шумовой процесс не является независимым (а это соответствует большинству реальных каналов связи), выше, чем в каналах без памяти, на которые и ориентированы практически используемые сегодня кодовые конструкции. Это противоречие разрешается применением процедуры декорреляции канала, однако такой подход не позволяет реализовать предельно достижимые характеристики каналов с памятью. Для решения этой задачи необходима разработка как методов построения кодов, так и алгоритмов декодирования для каналов с памятью, однако данная область на сегодня исследована недостаточно.

В 60–90-е годы XX в. результаты в области каналов с памятью излагались в трудах Э. Гилберта и Э. Эллиотта, Р. Галлагера, монографиях Э. Л. Блоха, О. В. Попова, В. Я. Турина, книгах Л. М. Финка, В. И. Коржика, Л. П. Пуртова и др.

В последние годы изучалось применение современных методов кодирования в каналах с памятью. В работах [3–7] рассматривается применение низкоплотностных кодов в каналах с памятью. В [8–10] исследуются вопросы передачи по таким каналам с помощью полярных кодов. Необходимо отметить, что в этих статьях в основном затрагиваются либо очень узкие специфические случаи конкретных, достаточно специфических систем передачи, либо адаптация существующих кодовых конструкций, предполагающая дальнейшее использование стандартных методов декодирования. В работах [11–13] исследуется задача исправления пакетов ошибок, образование которых характерно для каналов с памятью.

Одним из инструментов, который может быть использован для учета особенностей канала связи как при построении кодов, так и при декодировании, является метрическое описание канала, т. е. введение функции расстояния, с одной стороны, учитывающей вероятностные характеристики шумового процесса в используемой математической модели канала, а с другой — позволяющей сформулировать критерий декодирования как оптимизационную задачу в рамках заданной метрики. Вопросам метрического описания каналов и связанных с этим методов кодирования посвящены, например, работы [14–19].

В данной статье рассматривается метрика, введенная в монографии [14] для марковских каналов, где было доказано, что метрика согласована с марковским каналом для некоторых длин кодов. Однако до сих пор не проведен более детальный анализ связи согласованности с параметрами канала и неисследованными остаются обеспечиваемые при использовании данной метрики вероятности ошибки, в том числе в случаях, когда согласованность не обеспечивается. В [19] рассматривалось применение данной метрики в каналах с двумя состояниями, но только для достаточно частного случая, когда для кода возможно построить стандартную расстановку.

Статья организована следующим образом. Описывается модель канала связи с памятью, основанная на марковской модели шума, и анализируется пропускная способность по сравнению с двоичным симметричным каналом без памяти. Описывается метрика для марковского канала, проводится анализ параметров модели канала, а также длины кода, при которых выполняется условие согласованности. Для коротких кодов проводится оценка вероятности ошибки при декодировании по минимуму расстояния в данной метрике в марковском канале. Далее предлагается модификация алгоритма Витерби для использования марковской метрики в сверточных

кодах и проводится экспериментальная оценка вероятности ошибки декодирования сверточных кодов в марковских каналах как в условиях согласованности, так и за ее пределами.

Каналы связи с конечным числом состояний

Для формулировки постановки задачи исправления ошибок необходимо задать математическую модель канала, которая описывала бы возникающие в канале связи шумовые процессы и позволяла осуществлять расчеты характеристик, например вероятности возникновения конкретных комбинаций ошибок. К. Шеннон ввел фундаментальную характеристику, называемую пропускной способностью канала, зависящую только от свойств канала, а не от методов передачи, и показывающую предельно достижимую скорость передачи информации при теоретической возможности обеспечить сколь угодно малую вероятность ошибки декодирования.

Для простейшего случая канала с двоичным входом и выходом и вероятностью искажения отдельного передаваемого бита, равной p (т. е. двоичного симметричного канала, ДСК), пропускная способность

$$C_{\text{ДСК}} = 1 - \mathcal{H}(p) = 1 + p \log p + (1 - p) \log (1 - p),$$

где $\mathcal{H}(p)$ — энтропия двоичного ансамбля. Двоичный симметричный канал, как и ряд других наиболее распространенных моделей (например, полунепрерывный канал с аддитивным белым гауссовым шумом, АБГШ), является каналом без памяти. Это означает, что если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ — вход канала, а $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_N)$ — его выход, то выполняется

$$p(\mathbf{y} | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^N p(y_i | x_i). \quad (1)$$

В реальных системах связи шумовой процесс, как правило, обладает памятью, т. е. равенство (1) не выполняется.

Одной из наиболее распространенных моделей, отражающих эффект наличия памяти в канале, является описание шумового процесса с помощью марковского процесса, тогда канал описывается множеством состояний марковской цепи и переходными вероятностями между состояниями. Такие модели называются каналами с конечным числом состояний (ККЧС). Чаще всего рассматривается дискретный двоичный канал, где число состояний равно двум: «плохое» состояние В, в котором высока вероятность η_B возникновения ошибок, и «хорошее» G, в кото-

ром ошибки возникают с существенно меньшей вероятностью η_G . При $1 \geq \eta_B > \eta_G \geq 0$ такая модель называется каналом Гилберта – Эллиотта с вероятностями переходов из одного состояния в другое: P_{BG} и P_{GB} , $P_{BB} = 1 - P_{BG}$, $P_{GG} = 1 - P_{GB}$. Безусловные вероятности состояний равны

$$P_G = \frac{P_{BG}}{P_{GB} + P_{BG}}, P_B = \frac{P_{GB}}{P_{GB} + P_{BG}},$$

безусловная вероятность битовой ошибки в таком канале может быть выражена следующим образом:

$$p_e = \eta_B P_G + \eta_G P_B = \frac{\eta_B P_{GB} + \eta_G P_{BG}}{P_{GB} + P_{BG}}. \quad (2)$$

Такая вероятность битовой ошибки была бы в ДСК, полученном путем перемежения на бесконечной длине, поэтому будем называть величину p_e эквивалентной вероятностью ошибки и использовать как параметр, характеризующий ДСК и ККЧС и позволяющий производить их сравнение. Заметим, что для задания ККЧС, помимо значения p_e , необходимо задать одно из значений переходных вероятностей, для этого будем использовать величину P_{GG} .

Важными частными случаями канала Гилберта – Эллиотта являются упрощенные модели – модель Гилберта и простая марковская модель. В канале Гилберта $\eta_G = 0$, т. е. ошибки могут происходить только в «плохом» состоянии канала, а η_B зачастую полагается равной 0,5. В простой марковской модели в «хорошем» состоянии ошибки также отсутствуют, а вероятность ошибки в «плохом» состоянии $\eta_B = 1$, т. е. передаваемый бит всегда инвертируется, если канал находится в «плохом» состоянии. Для случая простого марковского канала обозначим состояния В и G через 1 и 0 соответственно, и эквивалентная вероятность ошибки

$$p_e = P_1 = \frac{P_{01}}{P_{10} + P_{01}}. \quad (3)$$

Пропускные способности некоторых ККЧС могут быть достаточно легко вычислены. Так, для простого марковского канала

$$C_M = 1 - P_0 \mathcal{H}(P_{00}) - P_1 \mathcal{H}(P_{10}).$$

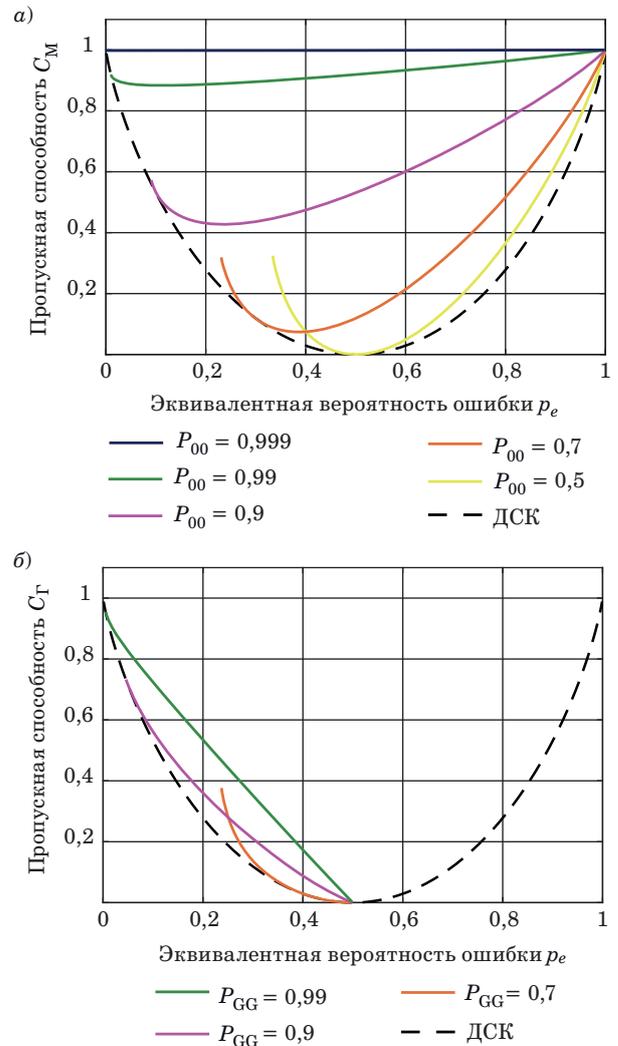
Пропускная способность канала Гилберта (состояния которого неизвестны на приемнике) может быть вычислена как

$$C_\Gamma = 1 + p_e \sum_{i=0}^{\infty} v(i) \log v(i),$$

где $v(i) = \Pr(0^i 1 | 1)$ – вероятность того, что в векторе ошибок, генерируемом каналом, после единицы и серии из i нулей снова будет получена единица. Формулы для вычисления $v(i)$ были получены самим Э. Гилбертом.

Стоит отметить, что вычисление, даже приближительное, пропускной способности канала Гилберта – Эллиотта является достаточно вычислительно нетривиальной задачей, хотя известны подходы, предлагающие для этого различные аппроксимации. Мы здесь не рассматриваем эту задачу, и в дальнейшем будем рассматривать только простую марковскую модель и канал Гилберта.

Пропускные способности $C_{ДСК}$, C_M и C_Γ показаны как функции от эквивалентной вероятности ошибки (рис. 1, а и б). Как можно видеть, с увеличением значений P_{00} (P_{GG}), т. е. с увели-



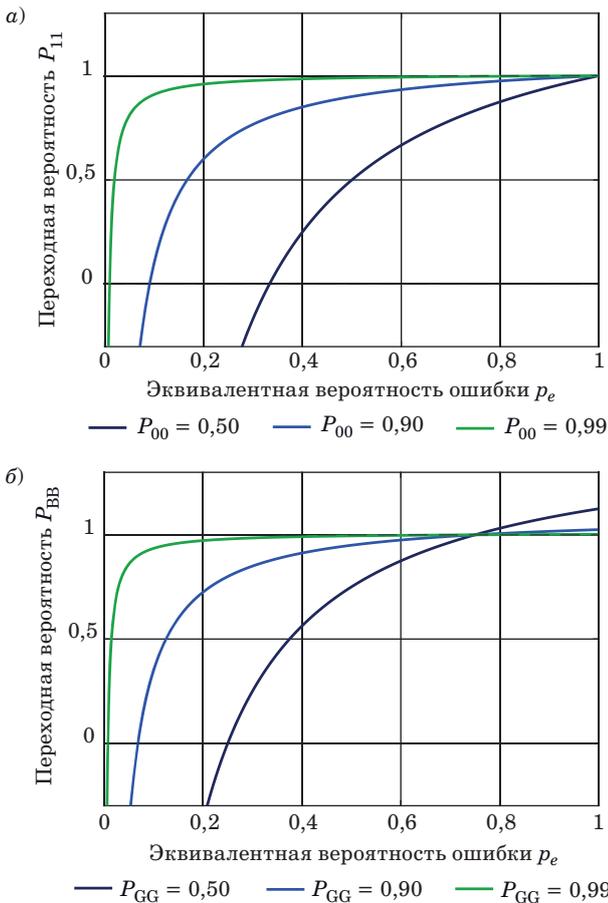
■ **Рис. 1.** Пропускная способность простого марковского канала (а) и канала Гилберта при $\eta_B = 0,5$ (б)
 ■ **Fig. 1.** Capacity of the simple Markov channel (а) and of the Gilbert channel with $\eta_B = 0,5$ (б)

чением «эффекта памяти» в канале, пропускная способность имеет тенденцию к увеличению, и во всех случаях пропускная способность ККЧС превышает или равна пропускной способности ДСК, причем равенство достигается только в двух точках касания для каждой кривой на графике.

Однако, как можно видеть из рис. 1, пропускные способности ККЧС изображены не для всех значений эквивалентной вероятности ошибки p_e . Действительно, легко показать, что при фиксированном значении P_{00} величина $P_{11} \geq 0$ только при выполнении условия

$$\frac{1 - P_{00}}{2 - P_{00}} \leq p_e \leq 1,$$

для больших значений P_{00} , которые представляют особый интерес при исследовании каналов с памятью, нижняя граница величины p_e довольно мала. Например, при $P_{00} \geq 0,9$ выполняется $p_e \geq 0,09$. Аналогично для канала Гилберта при



■ **Рис. 2.** Зависимость переходных вероятностей от эквивалентной вероятности ошибки для простого марковского канала (а) и для канала Гилберта с $\eta_B = 0,75$ (б)

■ **Fig. 2.** The dependence of transition probabilities by equivalent error probability for simple Markov channel (a) and for Gilbert channel with $\eta_B = 0.75$ (b)

фиксированном P_{GG} условие $P_{BB} \geq 0$ справедливо при

$$\frac{(1 - P_{GG})\eta_B}{2 - P_{GG}} \leq p_e \leq \eta_B.$$

Этот эффект изображен с помощью зависимости P_{11} (P_{BB}) от p_e при фиксированных P_{00} (P_{GG}) на рис. 2, а и б.

Это означает, что модели ККЧС существуют не для всего диапазона значений p_e , и это необходимо учитывать при проведении исследований.

Метрика для марковского канала

Пусть для передачи информации по каналу связи используются кодовые слова \mathbf{x} некоторого кода C и на выходе канала получена последовательность \mathbf{y} . Оптимальным с точки зрения минимизации вероятности ошибки декодирования (при предположении о равновероятности кодовых последовательностей на входе канала) является правило определения кодового слова в соответствии с критерием

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x} \in C} p(\mathbf{y} | \mathbf{x}), \quad (4)$$

где $\hat{\mathbf{x}}$ – решение декодера, а вероятность $p(\mathbf{y} | \mathbf{x})$ при фиксированном \mathbf{y} называется функцией правдоподобия от аргумента \mathbf{x} , поэтому использование выражения (4) называется декодированием по критерию максимума правдоподобия. Фактически такое декодирование эквивалентно нахождению самого вероятного в данном канале вектора ошибок $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Другим способом определения критерия декодирования является задание функции расстояния $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между двумя векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} , которая называется метрикой при выполнении следующих условий:

1) (неотрицательность) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ и $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{y}$;

2) (симметричность) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

3) (неравенство треугольника) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ для любого вектора \mathbf{z} . Тогда критерий

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in C} d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad (5)$$

называется декодированием по минимуму расстояния, и такое декодирование эквивалентно нахождению кодового слова, ближайшего к принятому слову в терминах некоторой выбранной метрики. С понятием расстояния между векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} тесно связана величина $W(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = W(\mathbf{z}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, называемая весом вектора \mathbf{z} , и декодирование по минимуму расстоя-

ния может рассматриваться как нахождение вектора ошибок $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ минимального веса.

Важное отличие критерия (4) от (5) состоит в том, что функция правдоподобия определяется свойствами канала связи, в то время как метрика может выбираться разработчиком системы связи исходя из различных практических соображений. Если при этом для любых векторов \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 условие $W(\mathbf{z}_1) < W(\mathbf{z}_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда $P(\mathbf{z}_1) > P(\mathbf{z}_2)$, то метрика называется согласованной с каналом связи, и нахождение самого легкого вектора совпадает с нахождением самого вероятного, и решения, принимаемые декодерами по минимуму расстояния и максимуму правдоподобия, совпадают.

Так, для ДСК согласованной является метрика Хэмминга, однако она не согласована с ККЧС.

В [14] предложен класс метрик для каналов, описываемых простой марковской моделью. Пусть $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_{N-1})$ — некоторый вектор, а числа $l_{00}(\mathbf{z}), l_{01}(\mathbf{z}), l_{10}(\mathbf{z}), l_{11}(\mathbf{z})$ означают количество пар соседних элементов 00, 01, 10, 11 соответственно в векторе \mathbf{z} . Зададим марковский вес вектора \mathbf{z} как

$$W_M(\mathbf{z}) = \omega_0 z_0 + \omega_{00} l_{00}(\mathbf{z}) + \omega_{10} l_{10}(\mathbf{z}) + \omega_{01} l_{01}(\mathbf{z}) + \omega_{11} l_{11}(\mathbf{z}), \quad (6)$$

тогда марковское расстояние между двумя двоичными векторами \mathbf{x} и \mathbf{y} определим классически как

$$d_M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = W_M(\mathbf{x} \oplus \mathbf{y}). \quad (7)$$

В [14] приведены условия, при которых функция, заданная (6) и (7), является метрикой, и показано, что в частном случае

$$W_M(\mathbf{z}) = z_0 + l_{10}(\mathbf{z}) + 2l_{01}(\mathbf{z}) \quad (8)$$

функция (8) является метрикой, согласованной с простым марковским каналом, если $P_{11} < P_{00}$ и длина кода N удовлетворяет неравенству

$$N < N^* = \min \left\{ \frac{\ln \frac{P_{10}}{P_{01}}}{\ln \frac{1-P_{01}}{1-P_{10}}} + 3, \frac{\ln \frac{1-P_{01}}{P_{10}}}{\ln \frac{1-P_{01}}{1-P_{10}}} + 3, \frac{\ln \frac{1-P_{10}}{P_{10}}}{\ln \frac{1-P_{01}}{1-P_{10}}} + 5 \right\}.$$

В [19] рассматривались разные подходы по выбору лидеров смежных классов при декодировании по стандартной расстановке на основе марковской метрики, однако такое декодирование и анализ обеспечиваемой вероятности ошибки возможны только для очень коротких кодов.

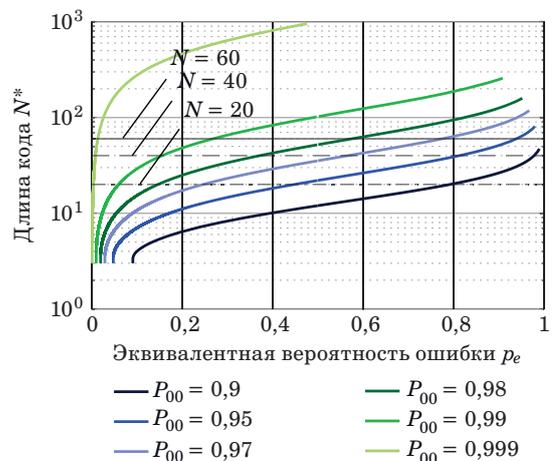
Проанализируем связь между параметрами простой марковской модели, длиной кода N^* и

согласованностью метрики. Для этого рассмотрим величину N^* в зависимости от параметров канала в терминах эквивалентной вероятности ошибки p_e . На рис. 3 показана зависимость N^* от эквивалентной вероятности ошибки p_e при фиксированных значениях P_{00} .

Отметим, что при использовании кода некоторой заданной длины N согласованность метрики выполняется при значениях p_e , для которых, с одной стороны, $N < N^*$, а с другой стороны, справедливо $P_{11} < P_{00}$. Как следует из (3), и это также можно видеть на рис. 2, а, $P_{11} < P_{00}$ справедливо тогда и только тогда, когда $p_e < 0,5$.

Рассмотрим для примера длину кода $N = 40$. Из рис. 3 можно заметить, что при $P_{00} = 0,9$ почти на всем протяжении графика (и при любых значениях $p_e \leq 0,5$) условие $N < N^*$ не выполняется, т. е. достичь согласованности метрики с простым марковским каналом при $P_{00} = 0,9$ и $N = 40$ невозможно. В таблице для выбранных длин $N = 20, N = 40$ и $N = 60$ и некоторых фиксированных значений P_{00} представлены параметры P_{11} и $p_e(N)$, при которых граница согласованности N^* достигает заданного значения N . Цветом выделены значения, при которых условие согласованности не выполняется вследствие нарушения условия $P_{11} < P_{00}$ (это происходит тогда и только тогда, когда $p_e > 0,5$). Заметим, что при $P_{00} = 0,9$ не существует простой марковской модели, при которой граница согласованности N^* достигает заданного значения $N = 60$, поэтому соответствующие ячейки таблицы содержат прочерк.

С помощью приведенной таблицы можно указать диапазон значений p_e , для которых марковская метрика согласована с указанным каналом при выбранной длине кода: если $T(P_{00}, N)$ — зна-



■ Рис. 3. Зависимость длины кода от эквивалентной вероятности ошибки в простом марковском канале

■ Fig. 3. Dependence of codelength by equivalent error probability in simple Markov channel

- Оценка согласованности марковской метрики для разных длин кодов и параметров простой марковской модели
- Estimation of Markov metric matching for selected codelengths and simple Markov model parameters

P_{00}	$N = 20$		$N = 40$		$N = 60$	
	P_{11}	$p_e(N)$	P_{11}	$p_e(N)$	P_{11}	$p_e(N)$
0,9	0,9739	0,7930	0,9979	0,9794	—	—
0,95	0,9386	0,4488	0,9886	0,8143	0,9968	0,9398
0,96	0,9256	0,3497	0,9839	0,7130	0,9948	0,8850
0,97	0,9083	0,2465	0,9771	0,5671	0,9914	0,7772
0,98	0,8836	0,1466	0,9662	0,3717	0,9853	0,5764
0,99	0,8415	0,0593	0,9458	0,1558	0,9728	0,2688
0,999	0,7167	0,0035	0,8773	0,0081	0,9265	0,0134

чение $p_e(N)$ из ячейки таблицы с соответствующими параметрами N и P_{00} , то метрика согласована для значений

$$p_e \in [T(P_{00}, N); 0,5]. \quad (9)$$

Как видно из таблицы, при увеличении длины кода интервал согласованности будет непустым только для очень больших значений P_{00} . При этом P_{11} в этом диапазоне также принимает значения, близкие к единице, т. е. память в канале становится все более выраженной, и канал стремится к постоянному пребыванию в одном состоянии с редкими переключениями, что мало соответствует реальным каналам связи.

Время (число отсчетов) t_0 и t_1 нахождения в состоянии 0 и 1 простого марковского канала соответственно является случайной величиной, распределенной по геометрическому закону. Для «хорошего» состояния при $P_{00} = 0,99$ математическое ожидание данной величины $M[t_0] = 1/P_{01} = 100$ соответствует среднему времени между пакетами ошибок (последовательностями ошибочных бит). В соответствии с таблицей для длины $N = 20$ и $P_{00} = 0,99$ метрика становится согласованной с каналом при $P_{11} \geq 0,8415$, т. е. при средней длине пакета ошибок $M[t_1] \geq 6,3$. Для $N = 60$ при том же значении $P_{00} = 0,99$ метрика согласована с каналом при $P_{11} \geq 0,9728$, что соответствует среднему времени нахождения в «плохом» состоянии $M[t_1] \geq 36,7$, т. е. средняя длина пакета ошибок больше половины длины кодового слова. Стоит отметить, что вероятность возникновения пакета длиной 36 $\Pr[t_1 = 36] = 0,01$, и большая часть пакетов будет иметь малую длину, однако передача по такому каналу все равно крайне затруднительна.

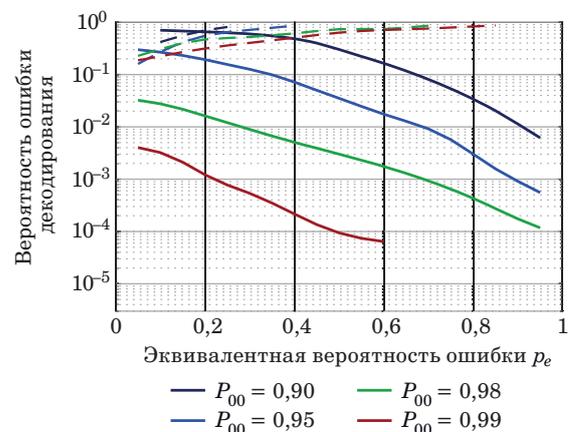
В качестве вывода из проведенного анализа можно заключить, что параметры, при которых

марковская метрика согласована с простой марковской моделью, задают достаточно ограниченный набор каналов. Однако вероятность ошибки при декодировании по минимуму расстояния может быть достаточно малой, даже если метрика не согласована, т. е. декодирование не соответствует критерию максимума правдоподобия. Вопросы экспериментальной оценки вероятности ошибки при декодировании в марковской метрике рассматриваются в следующих разделах.

Исследование вероятности ошибки декодирования по минимуму расстояния для блочного кода

Приведем результаты моделирования для каналов с памятью на примере марковского канала и канала Гилберта с использованием блочного кода при декодировании по минимуму расстояния в марковской метрике и метрике Хэмминга.

Рассмотрим передачу с использованием случайного блочного кода (40, 20) со скоростью 0,5 по марковскому каналу с фиксированным параметром P_{00} . На рис. 4 представлена зависимость вероятности ошибки декодирования от эквивалентной вероятности ошибки p_e при использовании метрики Хэмминга и марковской метрики для некоторых значений P_{00} от 0,9 до 0,99. Графики, соответствующие использованию марковской метрики, отображаются сплошной линией, метрики Хэмминга – пунктирной. Использование метрики Хэмминга в таких каналах показывает вероятность ошибки, большую 0,1 и стремящуюся к единице с ростом p_e . Можно сделать вывод, что на всем диапазоне p_e , кроме, возможно, небольшого участка, близкого к нулю, обеспечение



■ **Рис. 4.** Вероятность ошибки декодирования по минимуму расстояния в простом марковском канале для блочного кода (40, 20)

■ **Fig. 4.** Minimum distance decoding error probability of (40, 20) block code in simple Markov channel

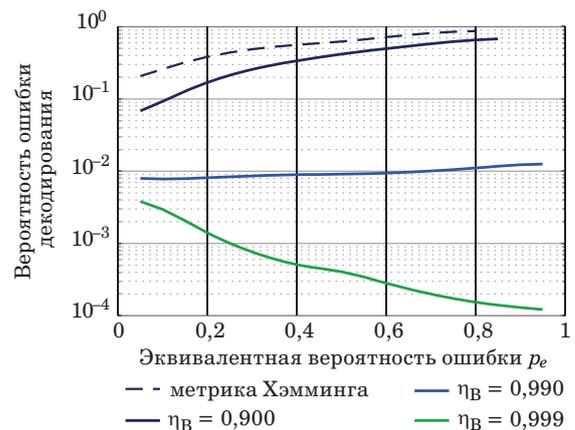
вероятностей ошибки декодирования, представляющих какой-либо практический интерес, с использованием метрики Хэмминга невозможно. В то же время декодирование с использованием марковской метрики может достигать заметно меньших вероятностей ошибки декодирования, и выигрыш тем больше, чем больше проявляется эффект памяти в канале. Напомним, что используемая марковская метрика согласована с каналом далеко не для всех значений p_e и точно не является согласованной при $p_e \geq 0,5$.

Обратим внимание на достаточно неожиданный характер поведения кривой вероятности ошибки декодирования в марковской метрике на рис. 4. Традиционно кривые вероятности ошибки декодирования стремятся к единице с увеличением параметра, характеризующего рост уровня шума (количество ошибочных бит) в канале связи. Однако парадоксальным образом чем больше вероятность битовой ошибки p_e в марковском канале, тем меньшую вероятность ошибки показывает декодирование в марковской метрике. Отчасти это можно объяснить пропускной способностью марковского канала (см. рис. 1, а). Как видно из графиков для $P_{00} \geq 0,9$, пропускная способность при значениях $p_e \geq 0,5$ превышает пропускную способность при $p_e < 0,5$, т. е. марковский канал становится «лучше» с точки зрения достижимых скоростей безошибочной передачи с ростом числа битовых ошибок. Хотя при $p_e \geq 0,5$ марковская метрика не согласована с каналом, по-видимому, этот эффект проявляется и в вероятностях ошибки декодирования. Обратим внимание, что для пропускных способностей канала Гилберта (см. рис. 1, б) указанное свойство неверно, в дальнейшем оценим вероятность ошибки декодирования в канале Гилберта.

В целом можно сделать вывод о том, что использование марковской метрики при рассмотренных параметрах марковского канала дает значительный выигрыш по сравнению с метрикой Хэмминга и позволяет понизить вероятность ошибки декодирования до значений, которые могут представлять практический интерес даже в случаях, когда марковская метрика не согласована с марковским каналом.

Вероятности ошибки декодирования по минимуму расстояния в марковской метрике в канале Гилберта с $P_{GG} = 0,99$ и различными значениями η_B представлены на рис. 5. Кривые, соответствующие использованию метрики Хэмминга, практически не отличаются для рассмотренных параметров каналов, поэтому на рисунке оставлен только один график для вероятности ошибки в метрике Хэмминга.

Декодирование показывает достаточно низкие вероятности ошибки, если вероятность η_B



■ **Рис. 5.** Вероятность ошибки декодирования блочного кода (40, 20) в канале Гилберта с разной вероятностью битовой ошибки η_B

■ **Fig. 5.** Decoding error probability of block (40, 20) code in Gilbert channel with different bit error probability η_B

близка к единице, т. е. канал близок к простой марковской модели. Однако при уменьшении η_B вероятность ошибки при использовании марковской метрики стремится к результатам, полученным для метрики Хэмминга. Обратимся снова к рис. 1, б, где изображена пропускная способность канала Гилберта для $\eta_B = 0,5$. Форма кривой для пропускной способности канала Гилберта в целом следует форме кривой для ДСК, оставаясь, тем не менее, выше. На рис. 5 мы также видим, что форма кривой вероятности ошибки в марковской метрике начинает повторять форму кривой для метрики Хэмминга.

Приведенные результаты позволяют сделать вывод о том, что марковская метрика может применяться и в более общих моделях ККЧС, однако с очень ограниченным набором параметров, приближающих ККЧС к простой марковской модели.

Модификация декодера Витерби в марковской метрике

Эксперименты, связанные с оценкой декодирования по максимуму правдоподобия или по минимуму расстояния, возможны только для кодов очень небольшой длины, в то время как специфика шума в каналах с памятью особенно проявляется лишь в течение некоторого времени. Чтобы оценить применение марковской метрики на больших длинах, рассмотрим решетчатое представление кода, сверточное кодирование и алгоритм Витерби.

Решетка — структура, чаще всего используемая для описания кодирования и декодирования сверточных и связанных с ними турбокодов,

однако с помощью решетки может быть задан и блочный код.

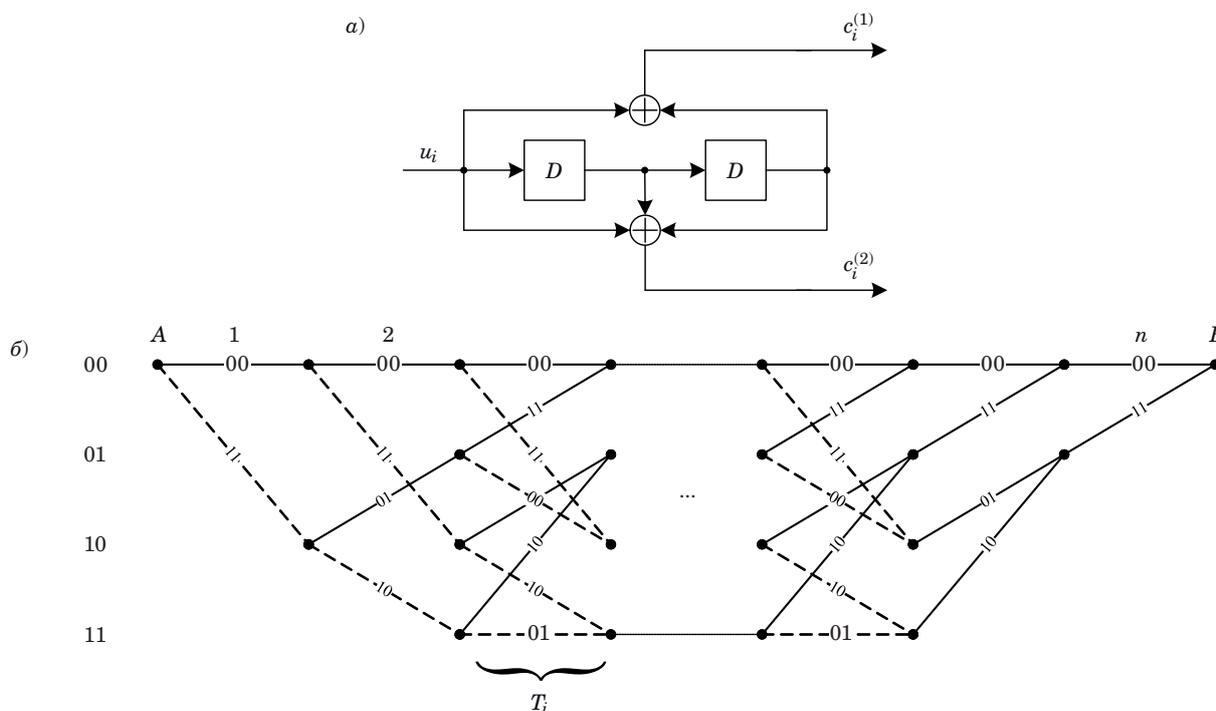
Решетку чаще всего можно представить как ориентированный граф, соединяющий две вершины, начальную A (исток) и конечную B (сток), так, что каждый путь из A в B состоит из ровно n ребер. Каждому ребру соответствует m кодовых символов, тогда последовательность символов, соответствующая некоторому пути из A в B , задает кодовое слово кода длиной $N = nm$.

Необходимо отметить, что существуют и более общие способы задания решетки, в частности с переменной величиной m , однако в дальнейшем для простоты мы будем рассматривать два широко используемых сверточных кода со скоростью 0,5, кодер которых описывается многочленами с коэффициентами в восьмеричном представлении (5, 7) и (171, 133). Кодер кода (5, 7) показан на рис. 6, а, решетка — на рис. 6, б. Символы на ребрах решетки соответствуют кодовым символам, ребро, изображенное сплошной линией, соответствует информационному биту 0, пунктирной — информационному биту 1. На рис. 6, б не изображены направления ребер, предполагается, что все ребра направлены слева направо.

Представление кода с помощью решетки дает возможность выполнять декодирование по максимуму правдоподобия, используя алгоритм Витерби. Фактически при этом исполь-

зуется декодирование по минимуму расстояния, т. е. ищется путь на решетке (задающий кодовое слово), ближайший к принятому слову в некоторой метрике. Так, для ДСК может быть использована метрика Хэмминга, для канала с АБГШ — метрика Евклида, обе эти метрики согласованы с соответствующими каналами. Поскольку нахождение наиболее вероятного пути (кодового слова) в случае согласованной метрики эквивалентно нахождению пути с минимальной метрикой, такой путь иногда называется кратчайшим.

Для нахождения такого кратчайшего пути в основе алгоритма Витерби лежит принцип динамического программирования: если в некоторый узел решетки из начального узла ведут несколько путей со своими стоимостями, можно выбрать локальный оптимальный путь (минимальной стоимости) из начального узла в текущий, и так как метрика — неотрицательная функция, оптимальность данного участка пути уже не может быть нарушена дальнейшим продвижением по решетке. Таким образом, при просмотре решетки достаточно на каждом шаге алгоритма рассматривать лишь одну секцию решетки, для левых узлов которой уже найдены оптимальные пути с их стоимостями (называемыми накопленными), и можно определить оптимальные пути до правых узлов, рассматривая только ребра секции.



■ Рис. 6. Кодер (а) и решетка (б) сверточного кода (5, 7)
 ■ Fig. 6. (5, 7) convolutional coder (a) and code trellis (б)

Для более формального описания введем некоторые обозначения, следуя статье [20] с некоторыми модификациями. Нас интересует вычисление метрики в алгоритме Витерби, поэтому опустим все вопросы, связанные с сохранением и восстановлением выживших путей, они могут быть реализованы любым из классических способов.

Определим решетку $T = (V, E)$ ранга n как орграф, каждая вершина которого находится на некоторой глубине i , $i = 0, 1, \dots, n$. Если $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,t_i}\}$ – множество вершин на глубине i , $|V_i| = t_i$, множество $V = \bigcup_{i=0}^n V_i$. Будем считать, что $t_0 = t_n = 1$, таким образом, решетка содержит единственную вершину A на глубине 0 и единственную вершину B на глубине n .

Любое ребро e решетки T связывает вершину на глубине $i-1$ с вершиной на глубине i , где $i = 1, \dots, n$. Обозначим множество ребер на одном ярусе как $E_{\{i-1, i\}}$, тогда $E = \bigcup_{i=1}^n E_{\{i-1, i\}}$. Обозначим i -й ярус решетки как $T_i = (V_{i-1} \cup V_i, E_{i-1, i})$, $i = 1, \dots, n$.

Если $e: u \rightarrow v$, введем обозначения для начала ребра $\text{init}(e) = u$ и конца ребра $\text{fin}(e) = v$.

Будем считать, что каждому ребру приписано неотрицательное вещественное число – метка (вес) ребра $\lambda(e)$. Обозначим через $\mu(u, v)$ сумму меток на пути из вершины u в вершину v (вообще говоря, таких путей может быть много, и в [20] величина $\mu(u, v)$ в общем случае определяется как сумма меток всех таких путей, однако в контексте декодирования Витерби речь идет об одном выжившем пути). Для простоты обозначим $\mu(A, v) = \mu(v)$, тогда $\mu(v)$ – минимальный вес пути среди всех путей из A в v , где под весом подразумевается расстояние между принятым из канала словом и кодовыми символами, соответствующими пути. Тогда $\mu(B)$ – расстояние между принятым словом и ближайшим к нему кодовым, само это ближайшее кодовое слово является результатом декодирования и задается выжившим путем минимального веса.

Пусть $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{nm-1})$ – слово, принятое из дискретного двоичного канала, т. е. $y_i \in \{0, 1\}$. Обозначим через $\mathbf{y}_i = (y_{(i-1)m}, y_{(i-1)m+1}, \dots, y_{im-1})$ подвектор \mathbf{y} , соответствующий i -му ярусу решетки T_i , $i = 1, \dots, n$.

Далее, пусть $c(e)$ – m кодовых бит, соответствующих ребру e . Тогда

$$z(e) = \mathbf{y}_i \oplus c(e) = (z_0(e), \dots, z_{m-1}(e)). \quad (10)$$

При использовании декодирования в метрике Хэмминга метка $\lambda(e)$ может быть вычислена как

$$\lambda(e) = d_H(c(e), \mathbf{y}_i) = W_H(z(e)),$$

VITERBIDECODING($T(V, E), \lambda$)

- 1: $\mu(A) = 0$;
- 2: for $i = 1$ to n
- 3: for $v \in V_i$
- 4: $\mu(v) = \min_{e: \text{fin}(e)=v} (\mu(\text{init}(e)) + \lambda(e))$;
- 5: return $\mu(B)$;

- **Рис. 7.** Алгоритм Витерби
- **Fig. 7.** Viterbi algorithm

где $d_H(\cdot, \cdot)$ и $W_H(\cdot)$ – расстояние и вес Хэмминга соответственно.

Тогда алгоритм Витерби (в части вычисления весов ребер) может быть описан следующим образом (рис. 7).

Данный алгоритм неявно использует тот факт, что если $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_2)$, где $(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_2)$ – конкатенация векторов \mathbf{z}_1 и \mathbf{z}_2 , то как метрика Хэмминга, так и метрика Евклида обладают следующим свойством:

$$W(\mathbf{z}) = W(\mathbf{z}_1 | \mathbf{z}_2) = W(\mathbf{z}_1) + W(\mathbf{z}_2), \quad (11)$$

таким образом, вес пути, состоящего из пути в левый узел секции и ребра из левого узла в правый, находится простым прибавлением стоимости ребра к накопленной стоимости.

Рассмотрим использование марковской метрики (6) и (7). Для этой метрики свойство (11) не выполняется. Получим для метрики общего вида (6) выражение, аналогичное выражению (11) для конкатенации двух векторов. Пусть $W_M^*(\mathbf{z}) = W_M(\mathbf{z}) - \omega_0 z_0$, т. е. метрика (6), не учитывающая значение начального символа \mathbf{z} . Если вектор $\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_{N-1})$, обозначим через \mathbf{z}_i^j подвектор $(z_i, z_{i+1}, \dots, z_j)$. Тогда

$$\begin{aligned} W_M(\mathbf{z}) &= W_M(\mathbf{z}_0^i | \mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) = \omega_0 z_0 + \omega_{00} l_{00}(\mathbf{z}_0^i) + \\ &+ \omega_{10} l_{10}(\mathbf{z}_0^i) + \omega_{01} l_{01}(\mathbf{z}_0^i) + \omega_{11} l_{11}(\mathbf{z}_0^i) + \omega_{z_i z_{i+1}} + \\ &+ \omega_{00} l_{00}(\mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) + \omega_{10} l_{10}(\mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) + \omega_{01} l_{01}(\mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) + \\ &+ \omega_{11} l_{11}(\mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) = W_M(\mathbf{z}_0^i) + \omega_{z_i z_{i+1}} + W_M^*(\mathbf{z}_{i+1}^{N-1}) = \\ &= W_M(\mathbf{z}_0^i) + W_M^*(z_i | \mathbf{z}_i^{N-1}) = W_M(\mathbf{z}_0^i) + W_M^*(\mathbf{z}_i^{N-1}). \end{aligned} \quad (12)$$

Из выражения (12) можно получить соответствующее выражение для согласованной метрики (8). Далее из (12) получаем

$$W_M(\mathbf{z}_0^i | \mathbf{z}_{i+1}^{i+m}) = W_M(\mathbf{z}_0^i) + W_M^*(z_i | \mathbf{z}_{i+1}^{i+m}), \quad (13)$$

где m – число кодовых бит, приходящихся на ярус решетки. Величина $W_M(\mathbf{z}_0^i)$ в (13) есть не что иное, как накопленная метрика пути, а

VITERBIDECODING($T(V, E), \lambda$)

```

1:  $\mu(A) = 0$ ;
2: for  $i = 1$  to  $n$ 
3:   for  $v \in V_i$ 
4:     for  $e: \text{fin}(e) = v$ 
5:        $\lambda(e) = \begin{cases} W_M(z(e)), & \text{init}(e) = A, \\ W_M^*(\zeta(\text{init}(e)) | z(e)), & \text{init}(e) \neq A. \end{cases}$ 
6:        $e^* = \arg \min_{e: \text{fin}(e)=v} (\mu(\text{init}(e)) + \lambda(e))$ ;
7:        $\mu(v) = \mu(\text{init}(e^*)) + \lambda(e^*)$ ;
8:        $\zeta(v) = z_{m-1}(e^*)$ ;
9: return  $\mu(B)$ ;
```

■ **Рис. 8.** Алгоритм Витерби в марковской метрике

■ **Fig. 8.** Viterbi algorithm using Markov metric

$W_M^*(z_i | \mathbf{z}_{i+1}^{i+m})$ может вычисляться как метрика ребер данного яруса. Однако для вычисления $W_M^*(z_i | \mathbf{z}_{i+1}^{i+m})$ для некоторого ребра e требуется знание z_i — последнего символа вектора ошибки, соответствующего выжившему пути из A в вершину $\text{init}(e)$; таким образом, для каждой вершины необходимо хранить не только метрику и выживший путь, но и значения z_i .

Заметим, что для первого яруса мы должны вычислить значение $W_M(z_0^{m-1})$, учитывающее значение z_0 , а для всех остальных ярусов вычисляется модифицированный вес $W_M^*(z_i | \mathbf{z}_{i+1}^{i+m})$. Тогда вычисление весов ребер $\lambda(e)$ для яруса T_1 можно выполнить следующим образом, используя $z(e)$ из (10):

$$\lambda(e) = W_M(z(e)), e \in E_{0,1}.$$

Обозначим через $\zeta(u)$ последний символ вектора ошибки, соответствующего выжившему пути из A в вершину u . Тогда для $T_i, i = 2, \dots, n$:

$$\lambda(e) = W_M^*(\zeta(\text{init}(e)) | z(e)).$$

С учетом всего вышеизложенного представим алгоритм Витерби в марковской метрике (рис. 8). Ребро e^* на шаге 6 — это ребро выжившего пути на текущем ярусе.

Необходимо отметить, что предложенный алгоритм обладает несколько большей вычислительной сложностью по сравнению с исходным вариантом, так как вовлекает дополнительные вычисления, однако данная модификация не приводит к увеличению числа состояний решетки, что может произойти при применении алгоритма Витерби к марковским каналам, и связанные с применением марковской метрики накладные расходы незначительны.

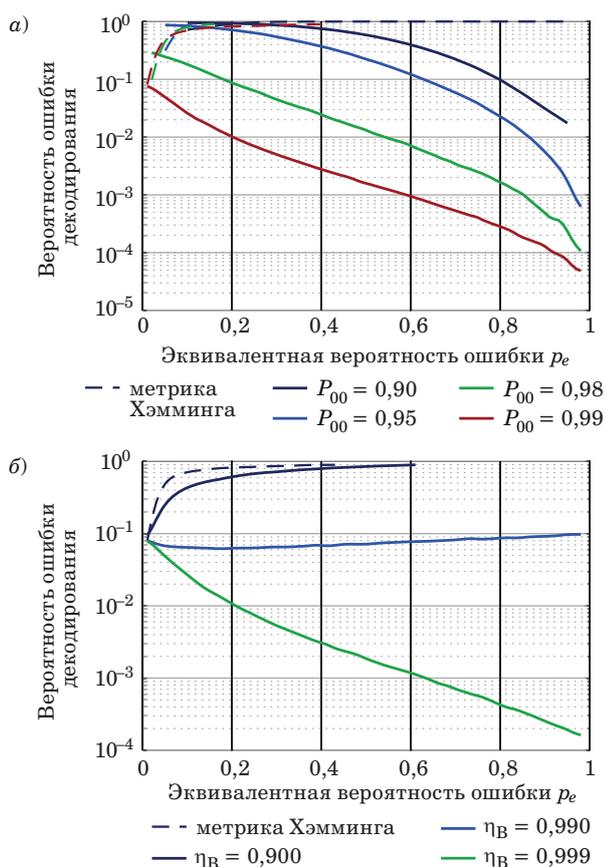
Исследование вероятности ошибки декодирования по минимуму расстояния для сверточного кода

В данном разделе приведем результаты моделирования для каналов с памятью на примере простого марковского канала и канала Гилберта с использованием сверточного кода при декодировании в марковской метрике и метрике Хэмминга.

Рассмотрим передачу с помощью сверточного кода (171, 133) со скоростью 0,5, с занулением решетки через каждые 100 информационных символов (что дает длину кодового слова $N = 200$) по марковскому каналу с $P_{00} = 0,99$. Заметим [см. рис. 3 и выражение (9)], что при таких параметрах марковская метрика не согласована с марковским каналом. На рис. 9, а показана зависимость вероятности ошибки декодирования от эквивалентной вероятности ошибки p_e при использовании метрики Хэмминга и марковской метрики. Использование метрики Хэмминга практически на всем интервале значений p_e не позволяет снизить вероятность ошибки существенно меньше единицы, кроме очень малого участка низких значений p_e , где доля ошибок крайне мала и метрика Хэмминга позволяет их исправить. Использование марковской метрики, несмотря на ее несогласованность с каналом, как и метрики Хэмминга, обеспечивает заметно меньшую вероятность ошибки по сравнению с метрикой Хэмминга. При этом необычная форма кривой вероятности ошибки, упомянутая при обсуждении рис. 4 в случае коротких блоковых кодов, сохраняется в марковском канале и для сверточных кодов большей длины.

Применим теперь декодирование Витерби в марковской метрике в канале Гилберта. Результаты декодирования в канале Гилберта с $P_{GG} = 0,99$ и различными значениями η_B представлены на рис. 9, б. Как и в случае с блоковым кодом на рис. 5, результаты для метрики Хэмминга практически не отличаются друг от друга при рассмотренных параметрах канала.

Из графиков можно видеть, что при вероятности ошибки $\eta_B = 0,9999$ кривая почти совпадает с кривой для марковского канала. Однако при уменьшении вероятности битовой ошибки в «плохом» состоянии даже до 0,99 значение вероятности ошибки хотя и остается ниже, чем у декодера в метрике Хэмминга, но не опускается ниже 0,05 на всем диапазоне p_e . При дальнейшем уменьшении η_B вероятность ошибки при использовании марковской метрики стремится к результатам, полученным для метрики Хэмминга. В целом можно сделать выводы, аналогичные сделанным при обсуждении рис. 5 и декодирования блокового кода.



■ **Рис. 9.** Вероятность ошибки декодирования сверточного кода (171, 133) в марковском канале (а) и в канале Гилберта с разной вероятностью битовой ошибки η_B (б)
 ■ **Fig. 9.** Decoding error probability of (171, 133) convolutional code in Markov channel (a) and in Gilbert channel with different bit error probability η_B (б)

Это говорит о том, что рассмотренная марковская метрика хотя и показывает значительный выигрыш в марковском канале, особенно при больших значениях p_e , плохо применима к другим моделям с конечным числом состояний, более адекватным реальным каналам. Для таких каналов требуется нахождение иных метрик или функций декодирования.

Литература

1. Lin S., Li J. *Fundamentals of Classical and Modern Error-Correcting Codes*. Cambridge, Cambridge University Press, 2022. 840 p. doi:10.1017/9781009067928
2. Moon T. K. *Error Correction Coding: Mathematical Methods and Algorithms*. Second ed. Hoboken, NJ, Wiley, 2021. 992 p.
3. Xiao X., Vasic B., Lin S., Li J., Abdel-Ghaffar K. Quasi-cyclic LDPC codes with parity-check matrices of column weight two or more for correcting phased bursts of erasures. *IEEE Trans. Commun.*, 2021,

Заключение

В данной статье рассматривается вопрос применимости марковской метрики как в простой марковской модели, для которой она предназначена, так и в более общем случае канала Гилберта. Проведен анализ значений переходных вероятностей и длин кодов, при которых марковская метрика является согласованной, который показывает, что при заданной длине используемого кода диапазон значений параметров марковского канала, при которых метрика согласована, может быть достаточно узок или отсутствовать вообще.

Проведены эксперименты по оценке вероятности ошибки декодирования в марковской метрике и сравнению с результатами, получаемыми при использовании метрики Хэмминга. Эксперименты проведены как для блочных кодов малой длины, так и для сверточных кодов длиной несколько сотен бит, для чего была разработана модификация алгоритма Витерби для декодирования в марковской метрике.

Для марковских каналов марковская метрика показывает значительный выигрыш по сравнению с метрикой Хэмминга даже для случаев, когда она не согласована с каналом. Однако при переходе от марковской модели к более общему каналу Гилберта марковская метрика не показывает выигрыша по сравнению с метрикой Хэмминга или даже проигрывает ей.

Направлением дальнейших исследований может стать разработка декодирующего правила для каналов Гилберта и Гилберта – Эллиотта, что представляет большой интерес на практике.

Финансовая поддержка

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-19-00305 «Пространственно-временные стохастические модели беспроводных сетей с большим числом абонентов».

vol. 69, no. 5, pp. 2812–2823. doi:10.1109/TCOMM.2021.3059001

4. Song L., Huang Q., Wang Z. Construction of multiple-burst-correction codes in transform domain and its relation to LDPC codes. *IEEE Trans. Commun.*, 2020, vol. 68, no. 1, pp. 40–54. doi: 10.1109/TCOMM.2019.2948341
5. Vafi S. Cyclic low density parity check codes with the optimum burst error correcting capability. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 192065–192072. doi:10.1109/ACCESS.2020.3032837
6. Veresova A. M., Isaeva M. N., Ovchinnikov A. A. Estimation of independent errors and bursts correction

- capability of linear codes. *2024 Conf. of Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElCon)*, Saint-Petersburg, IEEE, 2024, pp. 23–27. doi:10.1109/ElCon61730.2024.10468456
7. Li L., Lv J., Li Y., Dai X., Wang X. Burst error identification method for LDPC coded systems. *IEEE Commun. Lett.*, 2024, pp. 1–5. doi:10.1109/LCOMM.2024.3391826
 8. Aharoni Z., Huleihel B., Pfister H. D., Permuter H. H. Data-driven polar codes for unknown channels with and without memory. *2023 IEEE Intern. Symp. on Information Theory (ISIT)*, Taipei, IEEE, 2023, pp. 1890–1895. doi:10.1109/ISIT54713.2023.10206663
 9. Sasoglu E., Tal I. Polar coding for processes with memory. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2019, vol. 65, no. 4, pp. 1994–2003. doi:10.1109/TIT.2018.2885797
 10. Fang Y., Chen J. Decoding polar codes for a generalized Gilbert – Elliott channel with unknown parameter. *IEEE Trans. Commun.*, 2021, vol. 69, no. 10, pp. 6455–6468. doi:10.1109/TCOMM.2021.3095195
 11. Yang M., Pan Z., Djordjevic I. B. FPGA-based burst-error performance analysis and optimization of regular and irregular SD-LDPC codes for 50G-PON and beyond. *Opt. Express*, 2023, vol. 31, no. 6, pp. 10936–10946. doi:10.1364/OE.477546
 12. Исаева М. Н., Овчинников А. А. Исправление одиночных пакетов ошибок за пределами корректирующей способности кода с использованием информационных совокупностей. *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*, 2024, вып. 24, № 1, с. 70–80. doi:10.17586/2226-1494-2024-24-1-70-80, EDN: OMESTV
 13. Ovchinnikov A. A., Veresova A. M., Fominykh A. A. Decoding of linear codes for single error bursts correction based on the determination of certain events. *Информационно-управляющие системы*, 2022, № 6, с. 41–52. doi:10.31799/1684-8853-2022-6-41-52, EDN: UWXZHN
 14. Крук Е. А. Комбинаторное декодирование линейных блочных кодов: монография. СПб., ГУАП, 2007. 238 с.
 15. Gabidulin E. M. Combinatorial metrics in coding theory. *Proc. of 2nd IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, Budapest, IEEE, 1971, pp. 169–176.
 16. Sidorenko V., Li W., Kramer G. On interleaved rank metric codes. *2020 Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT)*, Albena, IEEE, 2020, pp. 128–134. doi:10.1109/ACCT51235.2020.9383406
 17. Firer M., Walker J. L. Matched metrics and channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2016, vol. 62, no. 3, Art. no. 3. doi:10.1109/TIT.2015.2512596
 18. Chen T., Ma Y., Zhang X. Optimal codes with small constant weight in l_1 -metric. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2021, vol. 67, no. 7, pp. 4239–4254. doi:10.1109/TIT.2021.3052191
 19. Veresova A., Fominykh A., Ovchinnikov A. About usage of metrics in decoding of LDPC codes in two-state channels with memory. *2021 XVII Intern. Symp. Problems of Redundancy in Information and Control Systems (REDUNDANCY)*, Moscow, IEEE, 2021, pp. 143–148. doi:10.1109/REDUNDANCY52534.2021.9606474
 20. McEliece R. J. On the BCJR trellis for linear block codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1996, vol. 42, no. 4, pp. 1072–1092. doi:10.1109/18.508834

UDC 519.72

doi:10.31799/1684-8853-2025-1-29-41

EDN: JQIBMZ

Performance evaluation of decoding in channels with memory with the use of a Markov metric

A. M. Veresova^a, Post-Graduate Student, orcid.org/0000-0002-3792-9249, a.veresova@guap.ru^aSaint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, 67, B. Morskaya St., 190000, Saint-Petersburg, Russian Federation

Introduction: Modern methods of error-correcting coding have come very close to the theoretical limits set by the Shannon coding theorems. However, these limits can be increased by taking into account the specifics of the error configuration in the channel. Thus, the relevant task is to research the methods of information transmission through channels with memory. **Purpose:** To analyze the conditions of matching a Markov metric with a simple Markov channel, as well as to explore the possibility of its applicability in more general Markov models. **Results:** We carry out the analysis of the parameters of a Markov channel and the encoding lengths at which a Markov metric is matched. We demonstrate that for a large set of parameters of practical interest, the matching range is small or absent. We propose a modification of the Viterbi algorithm for using the Markov metric. We conduct the experiments to estimate the error probability of minimal distance decoding for short-length block codes (several tens of bits) and moderate-length convolutional codes (several hundred bits). The results show that the Markov metric can significantly reduce the probability of decoding error in the Markov channel, even if the metric is unmatched. However, when changing from the Markov channel to more general models (Gilbert channel), the gain disappears. **Practical relevance:** Developed Viterbi decoder with the Markov metric makes it possible to achieve decoding error probabilities down to 10^{-2} – 10^{-4} in the Markov channel, where decoding with the use of a Hamming metric is inapplicable. **Discussion:** The results show that the requirement of metric matching is not mandatory to achieve low decoding error probability. Thus, the task of the development of the decoding rule arises for channels where noise is described with a hidden Markov model.

Keywords – channels with memory, metrics, maximum likelihood decoding, Viterbi decoding, finite state channel.

For citation: Veresova A. M. Performance evaluation of decoding in channels with memory with the use of a Markov metric. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 29–41 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-29-41, EDN: JQIBMZ

Financial support

The paper was prepared with the financial support of the Russian Science Foundation, project No. 22-19-00305 “Spatial-temporal stochastic models of wireless networks with a large number of users”.

References

1. Lin S., Li J. *Fundamentals of Classical and Modern Error-Correcting Codes*. Cambridge, Cambridge University Press, 2022. 840 p. doi:10.1017/9781009067928
2. Moon T. K. *Error Correction Coding: Mathematical Methods and Algorithms*. Second ed. Hoboken, NJ, Wiley, 2021. 992 p.
3. Xiao X., Vasic B., Lin S., Li J., Abdel-Ghaffar K. Quasi-cyclic LDPC codes with parity-check matrices of column weight two or more for correcting phased bursts of erasures. *IEEE Trans. Commun.*, 2021, vol. 69, no. 5, pp. 2812–2823. doi:10.1109/TCOMM.2021.3059001
4. Song L., Huang Q., Wang Z. Construction of multiple-burst-correction codes in transform domain and its relation to LDPC codes. *IEEE Trans. Commun.*, 2020, vol. 68, no. 1, pp. 40–54. doi:10.1109/TCOMM.2019.2948341
5. Vafi S. Cyclic low density parity check codes with the optimum burst error correcting capability. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 192065–192072. doi:10.1109/ACCESS.2020.3032837
6. Veresova A. M., Isaeva M. N., Ovchinnikov A. A. Estimation of independent errors and bursts correction capability of linear codes. *2024 Conf. of Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElCon)*, Saint-Petersburg, IEEE, 2024, pp. 23–27. doi:10.1109/ElCon61730.2024.10468456
7. Li L., Lv J., Li Y., Dai X., Wang X. Burst error identification method for LDPC coded systems. *IEEE Commun. Lett.*, 2024, pp. 1–5. doi:10.1109/LCOMM.2024.3391826
8. Aharoni Z., Huleihel B., Pfister H. D., Permuter H. H. Data-driven polar codes for unknown channels with and without memory. *2023 IEEE Intern. Symp. on Information Theory (ISIT)*, Taipei, IEEE, 2023, pp. 1890–1895. doi:10.1109/ISIT54713.2023.10206663
9. Sasoglu E., Tal I. Polar coding for processes with memory. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2019, vol. 65, no. 4, pp. 1994–2003. doi:10.1109/TIT.2018.2885797
10. Fang Y., Chen J. Decoding polar codes for a generalized Gilbert – Elliott channel with unknown parameter. *IEEE Trans. Commun.*, 2021, vol. 69, no. 10, pp. 6455–6468. doi:10.1109/TCOMM.2021.3095195
11. Yang M., Pan Z., Djordjevic I. B. FPGA-based burst-error performance analysis and optimization of regular and irregular SD-LDPC codes for 50G-PON and beyond. *Opt. Express*, 2023, vol. 31, no. 6, pp. 10936–10946. doi:10.1364/OE.477546
12. Isaeva M. N., Ovchinnikov A. A. Correction of single error bursts beyond the code correction capability using information sets. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2024, vol. 24, no. 1, pp. 70–80 (In Russian). doi:10.17586/2226-1494-2024-24-1-70-80, EDN: OMESTV
13. Ovchinnikov A. A., Veresova A. M., Fominykh A. A. Decoding of linear codes for single error bursts correction based on the determination of certain events. *Informatsionno-upravliayushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2022, no. 6, pp. 41–52. doi:0.31799/1684-8853-2022-6-41-52, EDN: UWXZHN
14. Krouk E. A. *Kombinatornoe dekodirovanie lineinykh blokovykh kodov* [Combinatorial decoding of linear block codes]. Saint-Petersburg, GUAP Publ., 2007. 238 p. (In Russian).
15. Gabidulin E. M. Combinatorial metrics in coding theory. *Proc. of 2nd IEEE Intern. Symp. on Information Theory*, Budapest, IEEE, 1971, pp. 169–176.
16. Sidorenko V., Li W., Kramer G. On interleaved rank metric codes. *2020 Algebraic and Combinatorial Coding Theory (ACCT)*, Albena, IEEE, 2020, pp. 128–134. doi:10.1109/ACCT51235.2020.9383406
17. Firer M., Walker J. L. Matched metrics and channels. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2016, vol. 62, no. 3, Art. no. 3. doi:10.1109/TIT.2015.2512596
18. Chen T., Ma Y., Zhang X. Optimal codes with small constant weight in l_1 -metric. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 2021, vol. 67, no. 7, pp. 4239–4254. doi:10.1109/TIT.2021.3052191
19. Veresova A., Fominykh A., Ovchinnikov A. About usage of metrics in decoding of LDPC codes in two-state channels with memory. *2021 XVII Intern. Symp. Problems of Redundancy in Information and Control Systems (REDUNDANCY)*, Moscow, IEEE, 2021, pp. 143–148. doi:10.1109/REDUNDANCY52534.2021.9606474
20. McEliece R. J. On the BCH trellis for linear block codes. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1996, vol. 42, no. 4, pp. 1072–1092. doi:10.1109/18.508834

ПАМЯТКА ДЛЯ АВТОРОВ

Поступающие в редакцию статьи проходят обязательное рецензирование.

При наличии положительной рецензии статья рассматривается редакционной коллегией. Принятая в печать статья направляется автору для согласования редакторских правок. После согласования автор представляет в редакцию окончательный вариант текста статьи.

Процедуры согласования текста статьи могут осуществляться как непосредственно в редакции, так и по e-mail (ius.spb@gmail.com).

При отклонении статьи редакция представляет автору мотивированное заключение и рецензию, при необходимости доработать статью – рецензию.

Редакция журнала напоминает, что ответственность за достоверность и точность рекламных материалов несут рекламодатели.



Функция распределения шумов угловых координат распределенной цели, замещаемой двухточечной моделью

А. В. Киселев^а, доктор техн. наук, профессор, orcid.org/0000-0002-4429-4675, nil_rtu@mail.ru

А. В. Тауров^а, аспирант, orcid.org/0000-0002-5334-2704

^аНовосибирский государственный технический университет, К. Маркса пр., 20, Новосибирск, 630073, РФ

Введение: замещение распределенного объекта двухточечной моделью упрощает имитацию экосигналов от него, но вызывает искажения шумов координат. Проверка модели на достоверность имитации является неотъемлемой частью имитационного моделирования. Одним из критериев адекватности имитации шумов координат служит совпадение функций плотности распределения вероятности для реального объекта и его модели. **Цель:** найти функцию плотности вероятности углового шума распределенного объекта, замещенного двухточечной моделью. **Результаты:** получена оценка плотности распределения вероятности угловых шумов распределенных радиолокационных объектов, замещенных двухточечной моделью, при условии измерения угловых координат антенной, имеющей игольчатую диаграмму направленности. Получены аналитические выражения для ошибок, возникающих при переходе к двухточечной модели, что позволяет оценивать изменения плотности распределения вероятности угловых шумов, обусловленные нелинейностью пеленгационной характеристики антенны. Показано, что эти искажения растут при увеличении углового разноса точек модели и размеров замещаемого объекта. Результаты моделирования продемонстрировали, что с увеличением этих параметров наблюдается увеличение разброса положений кажущегося центра излучения. Кроме того, при положении объекта, смещенном относительно центра двухточечной модели, возникает асимметрия плотности распределения вероятности угловых шумов. Установлена зависимость изменений математического ожидания и ширины функции распределения угловых шумов от формы и ширины диаграммы направленности антенны. **Практическая значимость:** полученные результаты могут быть использованы для оценки достоверности имитации шумов угловых координат распределенных радиолокационных объектов.

Ключевые слова — плотность распределения вероятности, распределенная цель, двухточечная модель, полунатурное моделирование, шумов угловых координат, кажущийся центр излучения.

Для цитирования: Киселев А. В., Тауров А. В. Функция распределения шумов угловых координат распределенной цели, замещаемой двухточечной моделью. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 1, с. 42–50. doi:10.31799/1684-8853-2025-1-42-50, EDN: KCYSEV

For citation: Kiselev A. V., Tayurov A. V. Probability density function of angular coordinates noise for distributed targets replaced by two-point model. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 42–50 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-42-50, EDN: KCYSEV

Введение

Достоинства полунатурного моделирования, заключающегося в том, что реальная радиоэлектронная обстановка замещается искусственной средой, созданной имитаторами сигналов и помех: снижение стоимости разработки, повышение ее скрытности, рост объема и полноты проводимых испытаний и многое другое, — хорошо известны и неоднократно рассматривались в литературе [1–4]. При этом реализация этих преимуществ невозможна без выполнения условия адекватности замещения реальной радиоэлектронной обстановки ее полунатурной моделью [5, 6], имеющего ключевое значение при любом моделировании. Для ряда задач проблема с адекватностью большей частью решена. Вместе с тем остается довольно обширная область, для которой данный аспект требует проработки, а именно имитация радиолокационных отра-

жений от распределенных радиолокационных объектов [7–9] и в первую очередь имитация их распределенности по угловым координатам. Дело в том, что такой объект представляем набором точечных отражателей (так называемой геометрической моделью), каждый из которых дает экосигнал, который, суммируясь с экосигналами от других точек, образует искомым экосигнал от объекта в целом [10]. Интерференция отражений от многих точек порождает ряд эффектов, таких как доплеровские биения и случайный характер положения кажущегося центра излучения (КЦИ) [11].

Последний заключается в том, что для распределенного по угловой координате объекта характерно перемещение КЦИ случайным образом [12]. Это явление называется шумами угловых координат (ШК) [13–15]. Они имеют плотность распределения вероятности (ПРВ) [16]

$$W(\xi, m, v) = \frac{v}{2(1 + v^2(\xi - m)^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

где ξ – положение КЦИ распределенного объекта; m – математическое ожидание положения КЦИ; $v > 0$ – параметр, определяющий рассеяние ШК.

Общие соотношения для работы с двухточечной моделью

Использование многоточечных геометрических моделей приводит к сложной многоканальной структуре имитирующего устройства. Поэтому ее заменяют простейшей двухточечной моделью [17]. Однако, как показано в работе [18], такая замена приводит к ошибкам установки углового положения КЦИ:

$$\chi(\xi_{\text{треб}}) = \xi_{\text{изм}} - \xi_{\text{треб}}, \quad (2)$$

где $\xi_{\text{изм}}$ – измеренное значение угла; $\xi_{\text{треб}}$ – требуемое значение угла; $\chi(\xi_{\text{треб}})$ – ошибка, обусловленная замещением объекта двухточечной моделью:

$$\chi(\xi) = -\text{Re} \left[\sqrt[3]{\sqrt{P^3 + (1 - \xi^2)3P^2 + (1 - 2\xi^2 + \xi^4)3P + (\xi^3 - \xi)(1 + j\sqrt{3})}} \right]. \quad (3)$$

Здесь $P = \frac{1}{\delta^2} \frac{r_2}{6r_4}$, 2δ – угол между точками модели; r_2, r_4 – коэффициенты полинома, аппроксимирующего одномерную игольчатую диаграмму направленности (ДН; antenna radiation pattern, ARP) антенны радиолокационной станции [19]:

$$F(\alpha) = r_0 + r_1(\alpha - \alpha_a) + r_2(\alpha - \alpha_a)^2 + r_3(\alpha - \alpha_a)^3 + r_4(\alpha - \alpha_a)^4,$$

где

$$r_0 = F(\alpha_a); \quad r_1 = \left. \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_a}; \quad r_2 = \left. \frac{1}{2} \frac{dF^2(\alpha)}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha_a}; \quad r_3 = \left. \frac{1}{6} \frac{dF^3(\alpha)}{d\alpha^3} \right|_{\alpha=\alpha_a}; \quad r_4 = \left. \frac{1}{24} \frac{dF^4(\alpha)}{d\alpha^4} \right|_{\alpha=\alpha_a};$$

$\alpha_a = 0$ – точка, в окрестности которой производится аппроксимация ДН; j – мнимая единица.

Поскольку при использовании двухточечной модели установка углового положения сопряжена с ошибками, то логично ожидать, что они приведут к ошибкам моделирования, в частности функции распределения ШК распределенного объекта.

Вывод функции распределения угловых шумов двухточечной модели

Найдем ПРВ ШК с учетом ошибок установки углового положения, используя метод обратных функций.

Для упрощения выкладок будем считать, что поляризация приемной антенны совпадает с поляризацией электромагнитной волны от объекта и точек модели.

Установим соответствие между плотностью распределения результатов измерения углового положения объекта $W_{\text{треб}}(\xi_{\text{треб}})$ и его двухточечной модели $W_{\text{изм}}(\xi_{\text{изм}})$.

Соотношение (3) определяет нелинейную связь между $\xi_{\text{треб}}$ и $\xi_{\text{изм}}$. При измерении положения КЦИ для двухточечной модели величина $\xi_{\text{треб}}$ подвергается нелинейному преобразованию $f(\xi_{\text{треб}})$, которое найдем следующим образом. Из (2) получим $\xi_{\text{изм}} = \xi_{\text{треб}} + \chi(\xi_{\text{треб}})$, следовательно, $f(\xi_{\text{треб}}) = \xi_{\text{треб}} + \chi(\xi_{\text{треб}})$.

Для определения $W_{\text{изм}}(\xi_{\text{изм}})$ воспользуемся известным соотношением [20]

$$W_{\text{изм}}(\xi_{\text{изм}}) = W_{\text{треб}}(\xi_{\text{треб}}) \left| \frac{d\xi_{\text{треб}}}{d\xi_{\text{изм}}} \right| = W_{\text{треб}}(f^{-1}(\xi_{\text{изм}})) \left| \frac{d}{d\xi_{\text{изм}}} f^{-1}(\xi_{\text{изм}}) \right|, \quad (4)$$

где $f^{-1}(\xi_{\text{изм}})$ – функция, обратная функции $f(\xi_{\text{треб}})$.

Как показано в [21], $\chi(\xi_{\text{трес}})$ может быть разбита на четыре участка, в пределах которых применимы простейшие аппроксимации (линейным и квадратичным полиномом):

$$\begin{aligned} \chi(\xi) &= \chi_1(\xi) + \chi_2(\xi) + \chi_3(\xi) + \chi_4(\xi), \\ \chi_1(\xi) &= a_0 + a_1\xi \text{ при } \xi \leq -\xi_{\text{ТР}}, \text{ иначе } \chi_1(\xi) = 0; \\ \chi_2(\xi) &= b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 \text{ при } -\xi_{\text{ТР}} < \xi \leq 0, \\ &\text{иначе } \chi_2(\xi) = 0; \\ \chi_3(\xi) &= -b_0 + b_1\xi - b_2\xi^2 \text{ при } 0 < \xi < \xi_{\text{ТР}}, \\ &\text{иначе } \chi_3(\xi) = 0; \\ \chi_4(\xi) &= -a_0 + a_1\xi \text{ при } \xi \geq \xi_{\text{ТР}}, \text{ иначе } \chi_4(\xi) = 0, \end{aligned}$$

где $\chi_1(\xi) - \chi_4(\xi)$ – функции ошибки установки углового положения КЦИ на участках 1–4 соответственно; a_0, a_1, b_0, b_1, b_2 – коэффициенты аппроксимации; $-\xi_{\text{ТР}}, \xi_{\text{ТР}}$ – точки перехода (transition points, TP) от линейного к квадратичному участку и наоборот.

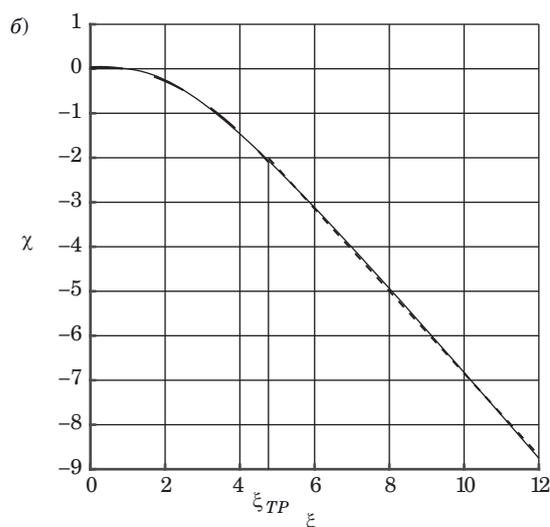
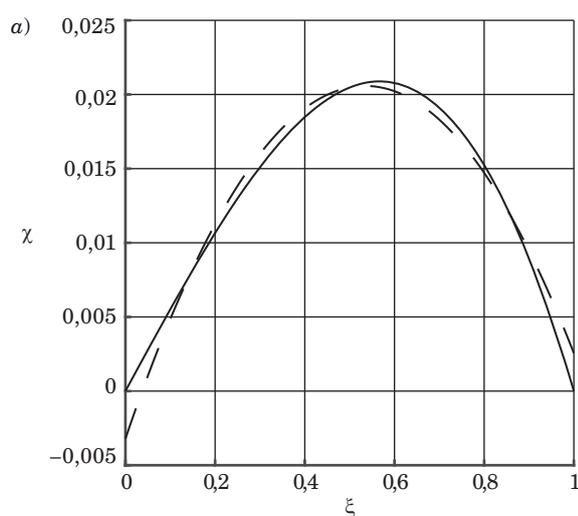
Коэффициенты аппроксимации и положение точек перехода от линейных к квадратичным участкам зависят от ДН сканирующей антенны и базы матрицы.

Результаты их поиска представлены в работе [21], частично в табл. 1 и на рис. 1, а и б. Они получены для антенн, ДН которых (точнее, их главные лепестки) дают наименьшие (ДН вида коси-

■ **Таблица 1.** Коэффициенты аппроксимации ошибки пеленга и максимальные относительные значения ошибок аппроксимации

■ **Table 1.** Approximation coefficients of bearing error for the ARP and the maximum relative values of approximation errors

Параметр	Коэффициенты для ДН вида			
	косинус		экспонента Гаусса	
δ	$0,1\alpha_{0,5}$	$0,5\alpha_{0,5}$	$0,1\alpha_{0,5}$	$0,5\alpha_{0,5}$
a_0	-10,9725	-2,3981	-7,3663	-1,4928
a_1	-0,90563	-0,92415	-0,96413	-0,96285
Макс.	-0,069189	-0,0069092	-0,005086	-0,063941
$\xi_{\text{ТР}}$	19,5	4,764	15,72	2,544
b_0	-0,013755	-0,033863	-0,14653	-0,029793
b_1	0,059367	0,054836	-0,034127	0,1857
b_2	0,022126	0,10548	0,031548	0,24022
Макс.	-0,012729	-0,027933	-0,030756	-0,058507



■ **Рис. 1.** Пример аппроксимации функции ошибки (3) для $\delta=0,5\alpha_{0,5}$, ДН косинус: а – в пределах модели квадратичным полиномом; б – на участках 3 и 4

■ **Fig. 1.** An example of approximation of the error function (3) for $\delta=0,5\alpha_{0,5}$, ARP cosine: а – within the model by a quadratic polynomial; б – in sections 3 and 4

нус: $F(\alpha) = \cos(1,5711\alpha/2\alpha_{0,5})$) и наибольшие (ДН вида экспонента Гаусса: $F(\alpha) = \exp(-(1,178\alpha/2\alpha_{0,5})^2)$) значения ошибок. Аргументы функций, определяющих ДН, подобраны так, чтобы обеспечить одинаковую ширину ДН по уровню половинной мощности.

Кривая (рис. 1, а), полученная по (3), показана сплошной линией, аппроксимирующая кривая, полученная по критерию минимума максимальной ошибки, показана штриховой линией. Сплошная кривая (рис. 1, б) получена по (3), две аппроксимирующие ее кривые (штриховая $\chi_3(\xi)$ и пунктирная $\chi_4(\xi)$) соединились в точке перехода $\xi_{ТР}$.

Численные оценки, представленные в табл. 1, показывают, что относительная максимальная ошибка аппроксимации составляет для ДН вида косинус менее 7 %, а для ДН вида экспонента Гаусса – менее 6,4 %.

Функция ошибки разбивается на два квадратичных и два линейных участка, на которых описывается простыми соотношениями. Рассмотрим ПРВ на этих участках.

1. Для линейного участка $\xi \leq -\xi_{ТР}$.

Найдем функцию, обратную функции $f(\xi_{треб})$:

$$\chi_1(\xi_{треб}) = \xi_{изм} - \xi_{треб} = a_0 + a_1\xi_{треб}, \quad \xi_{изм} = a_0 + a_1\xi_{треб} + \xi_{треб};$$

$$\xi_{изм} = a_0 + \xi_{треб}(1 + a_1); \quad \xi_{треб} = \frac{\xi_{изм} - a_0}{1 + a_1}.$$

Таким образом, обратная функция

$$f^{-1}(\xi_{изм}) = \frac{\xi_{изм} - a_0}{1 + a_1}.$$

Найдем производную обратной функции:

$$\frac{d}{d\xi_{изм}} f^{-1}(\xi_{изм}) = \frac{1}{1 + a_1}.$$

Выразим искомую плотность вероятности через исходную (1), используя (4):

$$W_{изм 1}(\xi_{изм}) = \frac{v}{2 \left(1 + v^2 \left(\frac{\xi_{изм} - a_0}{1 + a_1} - m \right)^2 \right)^{3/2}} \frac{1}{|1 + a_1|}.$$

Для второго линейного участка ($\xi \geq \xi_{ТР}$) имеем

$$\chi_4(\xi_{треб}) = \xi_{изм} - \xi_{треб} = -a_0 + a_1\xi_{треб};$$

$$f^{-1}(\xi_{изм}) = \frac{\xi_{изм} + a_0}{1 + a_1};$$

$$W_{изм 4}(\xi_{изм}) = \frac{v}{2 \left(1 + v^2 \left(\frac{\xi_{изм} + a_0}{1 + a_1} - m \right)^2 \right)^{3/2}} \frac{1}{|1 + a_1|}.$$

2. Для квадратичного участка $-\xi_{ТР} < \xi \leq 0$:

$$\xi_{изм} = b_0 + b_1\xi_{треб} + b_2\xi_{треб}^2 + \xi_{треб};$$

$$\xi_{изм} = b_0 + \xi_{треб}(1 + b_1) + b_2\xi_{треб}^2;$$

$$\xi_{треб 1,2} = -\frac{b_1 + 1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2 + 4b_2\xi_{изм} + 2b_1 + 1}}{2b_2}.$$

Таким образом, обратная функция

$$f_{1,2}^{-1}(\xi_{\text{изм}}) = -\frac{b_1 + 1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2 + 4b_2\xi_{\text{изм}} + 2b_1 + 1}}{2b_2}.$$

Найдем производную от обратной функции:

$$\frac{d}{d\xi_{\text{изм}}} f_{1,2}^{-1}(\xi_{\text{изм}}) = \pm \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2 + 4b_2\xi_{\text{изм}} + 2b_1 + 1}}.$$

Выразим искомую плотность вероятности, используя (4):

$$W_{\text{изм } 2}(\xi_{\text{изм}}) = \frac{v}{2 \left(1 + v^2 \left(-\frac{b_1 + 1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2 + 4b_2\xi_{\text{изм}} + 2b_1 + 1}}{2b_2} - m \right)^2 \right)^{3/2}} \times$$

$$\times \left| \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2 + 4b_2\xi_{\text{изм}} + 2b_1 + 1}} \right| + \frac{v}{2 \left(1 + v^2 \left(-\frac{b_1 + 1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2 + 4b_2\xi_{\text{изм}} + 2b_1 + 1}}{2b_2} - m \right)^2 \right)^{3/2}} \times$$

$$\times \left| \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2 + 4b_2\xi_{\text{изм}} + 2b_1 + 1}} \right|.$$

Для второго квадратичного участка ($0 < \xi < \xi_{\text{Тр}}$) имеем

$$\xi_{\text{изм}} = -b_0 + b_1\xi_{\text{треб}} - b_2\xi_{\text{треб}}^2 + \xi_{\text{треб}};$$

$$\xi_{\text{изм}} = -b_0 + \xi_{\text{треб}}(1 + b_1) - b_2\xi_{\text{треб}}^2;$$

$$\xi_{\text{треб } 1,2} = f_{1,2}^{-1}(\xi_{\text{изм}}) = \frac{b_1 + 1 \pm \sqrt{b_1^2 \pm 2b_1 - 4b_0b_2 - 4b_2\xi_{\text{изм}} + 1}}{2b_2};$$

$$\frac{d}{d\xi_{\text{изм}}} f_{1,2}^{-1}(\xi_{\text{изм}}) = -\frac{1}{\sqrt{b_1^2 \pm 2b_1 - 4b_0b_2 - 4b_2\xi_{\text{изм}} + 1}}.$$

Найдем искомую плотность вероятности:

$$W_{\text{изм } 3}(\xi_{\text{изм}}) = \frac{v}{2 \left(1 + v^2 \left(\frac{b_1 + 1 + \sqrt{b_1^2 + 2b_1 - 4b_0b_2 - 4b_2\xi_{\text{изм}} + 1}}{2b_2} - m \right)^2 \right)^{3/2}} \times$$

$$\times \left| \frac{1}{\sqrt{b_1^2 + 2b_1 - 4b_0b_2 - 4b_2\xi_{\text{изм}} + 1}} \right| + \frac{v}{2 \left(1 + v^2 \left(\frac{b_1 + 1 - \sqrt{b_1^2 - 2b_1 - 4b_0b_2 - 4b_2\xi_{\text{изм}} + 1}}{2b_2} - m \right)^2 \right)^{3/2}} \times$$

$$\times \left| \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - 2b_1 - 4b_0b_2 - 4b_2\xi_{\text{изм}} + 1}} \right|.$$

Сравнительный анализ распределений угловых шумов объекта и двухточечной модели

Результаты расчетов по полученным формулам представлены на рис. 2, а-г.

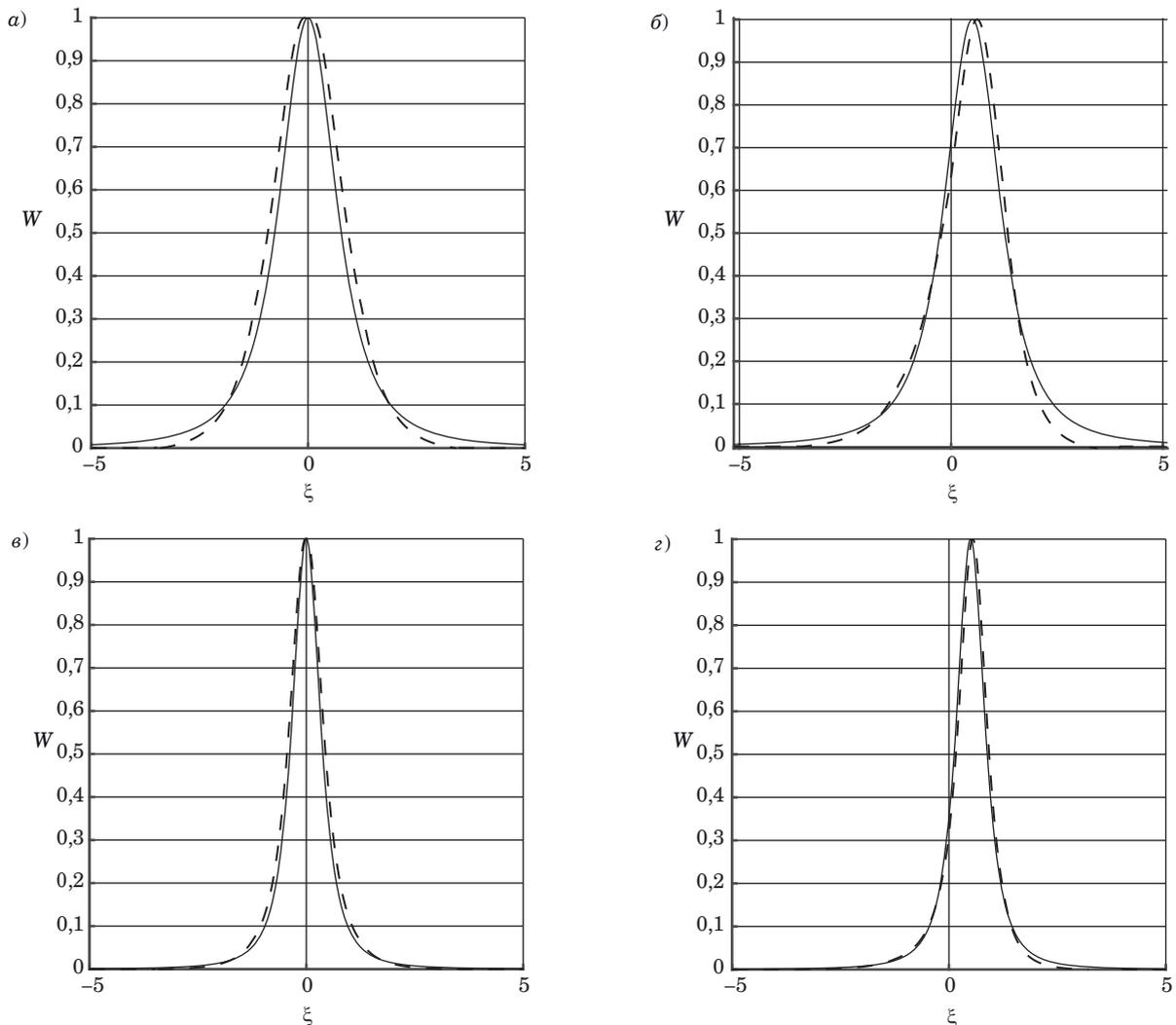
Плотность распределения вероятности ШК объекта выведена сплошной линией, ПРВ двухточечной модели – штриховой. Угловой разнос излучателей двухточечной модели равен половине ширины ДН ($\delta = 0,5\alpha_{0,5}$). Рисунки получены для ДН вида косинус.

Из них видно, что при $m = 0$ (рис. 2, а) положения максимумов $W_{\text{треб}}(\xi_{\text{треб}})$ и $W_{\text{изм}}(\xi_{\text{изм}})$ совпадают, что означает отсутствие смещения положения объекта имитации. Однако вблизи математического ожидания наблюдается расширение ПРВ – увеличение разброса положений КЦИ.

Проведем эксперимент для $v = 2$ (рис. 2, в и г):

При m в интервале между точками модели, но не в ее центре (рис. 2, б и г), появляется смещение положения объекта (смещение ПРВ). При этом ошибка установки углового положения приводит к тому, что:

- возникает ошибка в математическом ожидании ШК;
- $W_{\text{изм}}(\xi_{\text{изм}})$ становится несимметричной;
- изменяется размах ШК.



■ **Рис. 2.** Нормированные ПРВ объекта и двухточечной модели для $v = 1, m = 0$ (а); $v = 1, m = 0,5$ (б); $v = 2, m = 0$ (в); $v = 2, m = 0,5$ (г)
 ■ **Fig. 2.** Normalized probability density function object and two-point model for $v = 1, m = 0$ (a); $v = 1, m = 0,5$ (б); $v = 2, m = 0$ (в); $v = 2, m = 0,5$ (г)

■ **Таблица 2.** Статистические характеристики ПРВ объекта и двухточечной модели

■ **Table 2.** Statistical characteristics of the probability density function of the object and the two-point model

Параметры	Тип	m	γ_1
$v = 1, m = 0$	Объект	0	0
	Модель	0	0
$v = 1, m = 0,5$	Объект	0,5	0
	Модель	0,40505	-0,67049
$v = 2, m = 0$	Объект	0	0
	Модель	0	0
$v = 2, m = 0,5$	Объект	0,5	0
	Модель	0,48057	-0,94519

Значения математического ожидания m и коэффициента асимметрии γ_1 [22], определенные для функций ПРВ ШК объекта и модели, приведены в табл. 2.

Заключение

Полученные результаты позволяют сформулировать следующие выводы.

1. Найдено выражение для расчета плотности вероятности распределения угловых шумов двухточечной геометрической модели распределенного радиолокационного объекта.

2. Показано, что ошибки установки углового положения, обусловленные замещением распределенных объектов их двухточечными моделями, приводят к искажениям функции распределения имитируемых шумов угловых координат, а также погрешностям установки их параметров.

3. Эти погрешности в первую очередь проявляются в виде изменения математического ожидания и ширины функции распределения углового шума.

4. При этом, судя по результатам расчетов, вид функции распределения изменяется незначительно.

5. Изменения математического ожидания и ширины плотности вероятности распределения угловых шумов зависят от ДН радиолокационной станции, относительных размеров замещаемого объекта, разнеса излучателей модели и ряда других факторов.

6. Увеличение разнеса точек двухточечной модели и угловых размеров объекта приводит к росту ошибок задания математического ожидания, а также уменьшению рассеяния шумов угловых координат.

7. Поэтому для снижения названных ошибок следует уменьшать разнос точек, а также относительные угловые размеры замещаемого объекта.

8. В целом полученные результаты позволяют оценивать достоверность имитации шумов угловых координат распределенных радиолокационных объектов.

Литература

- Bokov A., Slizkoy V.** Generation of radar ground clutter echoes with Jakes' Doppler spectrum on FPGA. *Ural-Siberian Conference on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (USBREIT)*, Yekaterinburg, 19–21 September, 2022, pp. 136–140. doi:10.1109/USBREIT56278.2022.9923348
- Durnakov A. A., Bokov A. S., Slizkoy V. K.** Simulation of a radar target in the presence of a specular reflection from a water surface. *Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW)*, Divnomorskoe, 28 June 2021–02 July, 2021, pp. 401–404. doi:10.1109/RSEMW52378.2021.9494044
- Gorbatenko N. N., Nesterov V. Yu., Chikov N. I., Pomysov A. S.** Software development simulation model of the radar environment with verification based on full-scale experiment. *Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW)*, Divnomorskoe, 26–30 June, 2023, pp. 260–263. doi:10.1109/RSEMW58451.2023.10202080
- Wang Z., Xi X., Liao G., Lan L., Chen H.** Refined modeling and simulation method of raw signal returns for space-based radar. *IEEE 3rd International*

- Conference on Power, Electronics and Computer Applications (ICPECA)*, Shenyang, China, 29–31 January, 2023, pp. 214–219. doi:10.1109/ICPECA56706.2023.10076012
- Ergezer H., Keskin M. F., Gunay O.** Hardware-in-the-loop radar test simulator. *4th International Conference on Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications (SIMULTECH)*, Vienna, Austria, 28–30 August, 2014. doi:10.5220/0005034506660673
- Huang H., Pan M., Lu Z.** Hardware-in-the-loop simulation technology of wide-band radar targets based on scattering center model. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, no. 28 (5), pp. 1476–1484. doi:10.1016/j.cja.2015.07.006
- Taylor J., Hoare E., Gashinova M., Cherniakov M.** Experimental study of target signatures in reverse forward scatter radar with spatially distributed reflections. *International Radar Symposium (IRS)*, Wroclaw, Poland, 2–4 July, 2024, pp. 384–388.
- Bokov A., Slizkoy V.** Generation of radar ground clutter echoes with Jakes' Doppler spectrum on FPGA. *Ural-Siberian Conference on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (USBREIT)*, Yekaterinburg, 19–21 September,

- 2022, pp. 136–140. doi:10.1109/USBREIT56278.2022.9923348
9. **Stepanov M. A.** Simulation of reflections from surface-distributed objects on example of fragment of underlying surface. *Issues of Radio Electronics*, 2019, no. 4, pp. 22–26. doi:10.21778/2218-5453-2019-4-22-26
 10. **Gu D., Gao P., Xie Z., Gao W., Du Y., Xu X.** A fast generation algorithm of radar images for ships on time-evolving sea surface. *2nd China International SAR Symposium (CISS)*, Shanghai, China, 3–5 November, 2021, pp. 1–5. doi:10.23919/CISS51089.2021.9652361
 11. **Rao B., Gu Z., Nie Y.** Deception approach to track-to-track radar fusion using noncoherent dual-source jamming. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 50843–50858. doi:10.1109/ACCESS.2020.2980010
 12. **Zhang Y., Shen M., Wu D., Zhu D., Zhang Y.** Reduced complexity multiple-target angle-Doppler-range estimation using space-time cascaded monopulse processing. *Digital Signal Processing*, 2023, vol. 143, ID 104239. doi:10.1016/j.dsp.2023.104239
 13. **Li Y., Wang C., Dong S., Shen J., Wang H.** Fast estimated calculation of wideband radar angular glint using single frequency method. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 212541–212547. doi:10.1109/ACCESS.2020.3040436
 14. **Guo K. Y., Xiao G. L., Zhai Y., Sheng X. Q.** Angular glint error simulation using attributed scattering center models. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 35194–35205. doi:10.1109/ACCESS.2018.2846538
 15. **Selcuk B.** *Target Glint Phenomenon Analysis and of Glint Reduction Techniques*. PhD thesis, Sept. 2012. 87 p. <https://etd.lib.metu.edu.tr/upload/12614679/index.pdf> (дата обращения: 21.05.2023).
 16. **Островитянов Р. В., Басалов Ф. А.** *Статистическая теория радиолокации протяженных целей*. М., Радио и связь, 1982. 232 с.
 17. **Киселев А. В., Степанов М. А.** Замещение сложного радиолокационного объекта двухточечной моделью. *Известия РАН. Теория и системы управления*, 2019, т. 58, № 4, с. 99–105. doi:10.1134/S0002338819040061, EDN: UESJPN
 18. **Tayurov A. V., Kiselev A. V.** Errors in setting the angular position in matrix simulators due to the nonlinearity of the direction finding characteristics of the antenna. *16 International Scientific and Technical Conference Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE-2023)*, Novosibirsk, 10–12 November, 2023, pp. 570–573. doi:10.1109/APEIE59731.2023.10347847
 19. **Вендик О. Г., Парнес М. Д., Бахрах Л. Д.** *Антенны с электрическим сканированием. Введение в теорию*. М., Сов. радио, 2001. 252 с.
 20. **Wood S. N.** *Core Statistics*. New York, Cambridge University Press, 2015. 270 p. doi:<https://doi.org/10.1017/CBO9781107741973>
 21. **Киселев А. В., Таюров А. В.** Соотношения для оценки ошибок установки углового положения в матричных имитаторах радиоэлектронной обстановки. *Доклады АН ВШ РФ*, 2024, № 2 (63), с. 43–53. doi:10.17212/1727-2769-2024-2-43-53
 22. **Walck C.** *Handbook on Statistical Distributions for Experimentalists*. Stockholm, University of Stockholm, 2007. 411 p.

UDC 621.396.96

doi:10.31799/1684-8853-2025-1-42-50

EDN: KCYSEV

Probability density function of angular coordinates noise for distributed targets replaced by two-point modelA. V. Kiselev^a, Dr. Sc., Tech., Professor, orcid.org/0000-0002-4429-4675, nil_rtu@mail.ruA. V. Tayurov^a, Post-Graduate Student, orcid.org/0000-0002-5334-2704^aNovosibirsk State Technical University, 20, K. Marksa Pr., 630073, Novosibirsk, Russian Federation

Introduction: Replacing a distributed object with a two-point model simplifies the simulation of echo signals from it, but causes distortion of coordinate noise. Checking the model for simulation validity is an integral part of simulation modeling. One of the criteria for the adequacy of simulating coordinate noise is the coincidence of probability distribution density functions for a real object and its model. **Purpose:** To find the probability density function of angular noise of a distributed object replaced by a two-point model. **Results:** We have obtained an estimate of the probability density of angular noise distribution of distributed radar objects replaced by a two-point model, provided that the angular coordinates have been measured by an antenna having a needle pattern. In addition, we obtain analytical expressions for errors that occur during the transition to a two-point model, which makes it possible to estimate changes in the probability density of angular noise due to the nonlinearity of the direction-finding characteristics of the antenna. The research shows that these distortions grow with an increase in the angular spacing of the model points and the size of the object being replaced. The simulation results show that with an increase in these parameters, an increase in the spread of the positions of the apparent radiation center is observed. Furthermore, when the object's position is shifted relative to the center of the two-point model, an asymmetry in the probability distribution density of angular noise occurs. We establish the dependence of changes in the mathematical expectation and the width of the angular noise distribution function on the shape and width of the antenna pattern. **Practical relevance:** the results obtained can be used to assess the reliability of noise simulation of angular coordinates of distributed radar objects.

Keywords – probability density function, distributed targets, two-point model, semi-natural modeling, angular coordinate noise, glint, apparent radiating center.

For citation: Kiselev A. V., Tayurov A. V. Probability density function of angular coordinates noise for distributed targets replaced by two-point model. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 42–50 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-42-50, EDN: KCYSEV

References

1. Bokov A., Slizkoy V. Generation of radar ground clutter echoes with Jakes' Doppler spectrum on FPGA. *Ural-Siberian Conference on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (USBEREIT)*, Yekaterinburg, 2022, pp. 136–140. doi:10.1109/USBEREIT56278.2022.9923348
2. Durnakov A. A., Bokov A. S., Slizkoy V. K. Simulation of a radar target in the presence of a specular reflection from a water surface. *Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW)*, Divnomorskoe, 2021, pp. 401–404. doi:10.1109/RSEMW52378.2021.9494044
3. Gorbatenko N. N., Nesterov V. Yu., Chikov N. I., Pomysov A. S. Software development simulation model of the radar environment with verification based on full-scale experiment. *Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW)*, Divnomorskoe, 2023, pp. 260–263. doi:10.1109/RSEMW58451.2023.10202080
4. Wang Z., Xi X., Liao G., Lan L., Chen H. Refined modeling and simulation method of raw signal returns for space-based radar. *IEEE 3rd International Conference on Power, Electronics and Computer Applications (ICPECA)*, Shenyang, China, 2023, pp. 214–219. doi:10.1109/ICPECA56706.2023.10076012
5. Ergezer H., Keskin M. F., Gunay O. Hardware-in-the-loop radar test simulator. *4th International Conference on Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications (SIMULTECH)*, Vienna, Austria, 2014. doi:10.5220/0005034506660673
6. Huang H., Pan M., Lu Z. Hardware-in-the-loop simulation technology of wide-band radar targets based on scattering center model. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2015, no. 28 (5), pp. 1476–1484. doi:10.1016/j.cja.2015.07.006
7. Taylor J., Hoare E., Gashinova M., Cherniakov M. Experimental study of target signatures in reverse forward scatter radar with spatially distributed reflections. *International Radar Symposium (IRS)*, 2024, pp. 384–388.
8. Bokov A., Slizkoy V. Generation of radar ground clutter echoes with Jakes' Doppler spectrum on FPGA. *Ural-Siberian Conference on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (USBEREIT)*, Yekaterinburg, 2022, pp. 136–140. doi:10.1109/USBEREIT56278.2022.9923348
9. Stepanov M. A. Simulation of reflections from surface-distributed objects on example of fragment of underlying surface. *Issues of Radio Electronics*, 2019, no. 4, pp. 22–26. doi:10.21778/2218-5453-2019-4-22-26
10. Gu D., Gao P., Xie Z., Gao W., Du Y., Xu X. A fast generation algorithm of radar images for ships on time-evolving sea surface. *2nd China International SAR Symposium (CISS)*, Shanghai, China, 2021, pp. 1–5. doi:10.23919/CISS51089.2021.9652361
11. Rao B., Gu Z., Nie Y. Deception approach to track-to-track radar fusion using noncoherent dual-source jamming. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 50843–50858. doi:10.1109/ACCESS.2020.2980010
12. Zhang Y., Shen M., Wu D., Zhu D., Zhang Y. Reduced complexity multiple-target angle-Doppler-range estimation using space-time cascaded monopulse processing. *Digital Signal Processing*, 2023, vol. 143, ID 104239. doi:10.1016/j.dsp.2023.104239
13. Li Y., Wang C., Dong S., Shen J., Wang H. Fast estimated calculation of wideband radar angular glint using single frequency method. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, pp. 212541–212547. doi:10.1109/ACCESS.2020.3040436
14. Guo K. Y., Xiao G. L., Zhai Y., Sheng X. Q. Angular glint error simulation using attributed scattering center models. *IEEE Access*, 2018, vol. 6, pp. 35194–35205. doi:10.1109/ACCESS.2018.2846538
15. Selcuk B. *Target Glint Phenomenon Analysis and of Glint Reduction Techniques*. PhD thesis, Sept. 2012, 87 p. Available at: <https://etd.lib.metu.edu.tr/upload/12614679/index.pdf> (accessed 21 May 2023).
16. Ostrovityanov R. V., Basalov F. A. *Statisticheskaya teoriya radiolokacii protyazhennyh celej* [Statistical theory of radar of extended targets]. Moscow, Radio i sviaz' Publ., 1982. 232 p. (In Russian).
17. Kiselev A. V., Stepanov M. A. Replacement of a complex radar object by a two-point model. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2019, vol. 58, no. 4, pp. 595–600. doi:10.1134/S0002338819040061, EDN: UESJPN
18. Tayurov A. V., Kiselev A. V. Errors in setting the angular position in matrix simulators due to the nonlinearity of the direction finding characteristics of the antenna. *16 International Scientific and Technical Conference Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE-2023)*, Novosibirsk, 2023, pp. 570–573. doi:10.1109/APEIE59731.2023.10347847
19. Vendik O. G., Parnes M. D., Bakhrah L. D. *Antennы s elektricheskim skanirvaniem. Vvedenie v teoriyu* [Antennas with electric scanning. Introduction to theory]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 2001. 252 p. (In Russian).
20. Wood S. N. *Core Statistics*. New York, Cambridge University Press, 2015. 270 p. doi:<https://doi.org/10.1017/CBO9781107741973>
21. Kiselev A. V., Tayurov A. V. Ratios for estimating errors in the installation of angular position in matrix simulators of an electronic environment. *Proceedings of the Russian Higher School Academy of Sciences*, 2024, no. 2 (63), pp. 43–53 (In Russian). doi:10.17212/1727-2769-2024-2-43-53
22. Walck C. *Handbook on Statistical Distributions for Experimentalists*. Stockholm, University of Stockholm Publ., 2007. 411 p.

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Научные базы данных, включая Scopus и Web of Science, обрабатывают данные автоматически. С одной стороны, это ускоряет процесс обработки данных, с другой – различия в транслитерации ФИО, неточные данные о месте работы, области научного знания и т. д. приводят к тому, что в базах оказывается несколько авторских страниц для одного и того же человека. В результате для всех по отдельности считаются индексы цитирования, что снижает рейтинг ученого.

Для идентификации авторов в сетях Thomson Reuters проводит регистрацию с присвоением уникального индекса (ID) для каждого из авторов научных публикаций.

Процедура получения ID бесплатна и очень проста, есть возможность провести регистрацию на 12 языках, включая русский (чтобы выбрать язык, кликните на зеленое поле сверху справа на стартовой странице): <https://orcid.org>



Робототехническая система для трехмерной ультразвуковой реконструкции на основе силомоментного управления

В. С. Соколов^а, аспирант, младший научный сотрудник, orcid.org/0009-0006-8695-843X

Д. Д. Кульминский^а, канд. физ.-мат. наук, доцент, orcid.org/0000-0002-3936-2813, kulminskiy.dd@talantiuspeh.ru

^аНаучно-технологический университет «Сириус», Олимпийский пр., 1, Краснодарский край, федеральная территория «Сириус», п.г.т. Сириус, 354340, РФ

Введение: ультразвуковая диагностика является одним из наиболее распространенных методов обследования в медицине. Автоматизация данной процедуры с применением робототехнических манипуляторов позволит уменьшить нагрузку на медицинский персонал и предоставит доступ к медицинской диагностике в отдаленных регионах и при чрезвычайных ситуациях. **Цель:** разработать прототип робототехнической системы для проведения трехмерной реконструкции объекта по набору двумерных ультразвуковых снимков в В-режиме, полученных по линейному и вращательному паттерну сканирования. **Результаты:** осуществлена системная интеграция промышленного манипулятора и портативного ультразвукового прибора. Поддержание контакта с поверхностью осуществляется с помощью предложенного силомоментного регулятора. Проведена экспериментальная проверка системы на желатиновом манекене по восстановлению формы трехмерного объекта на основе двумерных снимков, позиция и ориентация каждого снимка вычисляется на основе встроенных энкодеров манипулятора. Помимо двумерных снимков, во многих случаях для более точной постановки диагноза будет полезным иметь трехмерную визуализацию обследуемой области. **Практическая значимость:** предложенный способ получения трехмерной визуализации обследуемой области может быть полезен в некоторых случаях клинической практики для более точной постановки диагноза. Предложенные подходы не привязаны к проприетарным алгоритмам конкретного производителя и могут быть перенесены на любые манипуляторы, имеющие интерфейс управления по скорости и оснащенные датчиком силы. **Обсуждение:** улучшение прототипа предполагает использование калиброванного ультразвукового датчика, модификацию силомоментного регулятора для работы в условиях сканирования искривленных поверхностей, а также внедрение сегментатора на основе машинного обучения для отделения объекта от фона.

Ключевые слова – прототип робототехнической системы, автоматизация процесса диагностики, ультразвуковое сканирование, промышленный манипулятор, датчик силы, силомоментное управление, силомоментное очувствление, модель контакта, трехмерная реконструкция объектов по изображению, ультразвуковые снимки.

Для цитирования: Соколов В. С., Кульминский Д. Д. Робототехническая система для трехмерной ультразвуковой реконструкции на основе силомоментного управления. *Информационно-управляющие системы*, 2025, № 1, с. 51–59. doi:10.31799/1684-8853-2025-1-51-59, EDN: LAXRPC

For citation: Sokolov V. S., Kulminskiy D. D. Robotic system for three-dimensional ultrasound reconstruction based on force-torque control. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 51–59 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-51-59, EDN: LAXRPC

Введение

С момента появления первых манипуляторов идут попытки внедрить их не только в промышленность, но и в медицину [1, 2]. Спецификой медицинских приложений является необходимость строго контролировать силу воздействия робототехнической системы на тела или среду в контактных операциях [3–5]: это может быть как контакт хирургического инструмента с мягкими тканями, так и контакт ультразвукового датчика с телом. На данный момент известно некоторое количество коммерческих разработок хирургических робототехнических систем. Ввиду дороговизны, громоздкости и необходимости технического обслуживания такие системы имеют невысокие темпы внедрения в медицинскую практику [6].

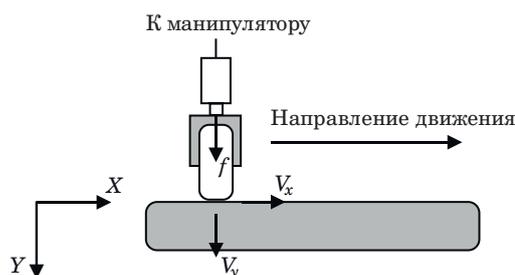
Авторам данной статьи видится, что более перспективной областью применения робототехнических систем в медицине являются различные малоинвазивные методы диагностики, например ультразвуковое обследование, а также физиотерапия и реабилитационная медицина [7]. Для таких приложений вопросы безопасности менее критичны, а самое главное, ожидаемая стоимость таких систем значительно ниже, чем для хирургических приложений. Уже существует ряд разработок [8], где манипулятор передвигает ультразвуковой датчик вместо руки врача, но в подавляющем большинстве случаев — это системы для телемедицины [9], т. е. врач контролирует движение и усилие, прикладываемое к ультразвуковому датчику, с помощью какого-либо тактильного очувствления (haptic feedback) [10].

В данной работе предложен прототип системы, которая, помимо автоматического сбора двумерных ультразвуковых снимков в В-режиме (brightness mode) [11], позволяет осуществлять трехмерную реконструкцию объекта. В отличие от систем телемедицины, где все контролируется врачом, в предлагаемом прототипе усилие на заданной траектории контролируется силомоментным регулятором, который генерирует скорости движения рабочего органа манипулятора на основе показаний датчика силы. Для осуществления 3D-реконструкции объекта известны решения с использованием различных механических приспособлений, выполняющих заданные паттерны движения датчика [12], существуют ультразвуковые датчики с двумерным сенсором из пьезоэлементов [13]. Недостатком первого решения является необходимость изготовления специальных механических приспособлений, второе отличается дороговизной. В предложенной системе в процессе сканирования положения ультразвукового датчика вычисляются на основе показаний энкодеров, которыми оснащен любой современный манипулятор. Затем данные о положениях системы координат ультразвукового датчика соотносятся с полученными снимками, и производится трехмерная реконструкция. В статье рассматриваются силомоментный регулятор для поддержания контакта датчика с поверхностью, техническое и программное обеспечение для реализации эксперимента, процесс трехмерной реконструкции и результаты эксперимента по восстановлению формы объекта, погруженного в манекен из желатина.

Регулятор силомоментного управления для движения по плоскости

Предлагаемый регулятор с обратной связью по силе может быть реализован для любого манипулятора, оснащенного датчиком силы с возможностью управления сочленениями по скоростям. Регулятор разработан специально для поддержания неразрывного контакта между некоторым инструментом и поверхностью с заданной уставкой силы, что особенно важно при сканировании датчиком УЗИ для обеспечения беспрепятственного распространения ультразвуковых волн.

Не уменьшая общности повествования, для простоты изложения введем конкретные системы координат для базы робота и датчика силы (рис. 1). Управляющими переменными являются линейные скорости рабочего инструмента на конце манипулятора v_x, v_y в системе координат базы манипулятора, которые формируются по обратной связи от датчика силы f . Необходимо сделать следующее замечание к вышеизложен-



■ **Рис. 1.** Схема движения инструмента
 ■ **Fig. 1.** Tool motion pattern

ному. Если интерфейс манипулятора не позволяет управлять линейными скоростями инструмента в декартовом пространстве, а только угловыми скоростями сочленений, то необходимо решать обратную задачу кинематики, за исключением этого предложенный принцип управления не изменится.

Уравнения движения конца манипулятора представим как интегрирующие звенья с запаздыванием

$$\begin{cases} T_x \ddot{x} + \dot{x} = v_x(f) \\ T_y \ddot{y} + \dot{y} = v_y(f) \end{cases} \quad (1)$$

где T_x, T_y – постоянные времени; f – обратная связь по силе в контакте (здесь предполагается сила, действующая со стороны инструмента на поверхность). Такая простота описания возможна благодаря наличию интерфейса управления по скоростям для манипуляторов фирмы ABB Ltd., применяемых в данной работе.

Цель управления – обеспечить заданное усилие в пятне контакта F_{ref} а также двигаться вдоль поверхности с заданной скоростью V_{x_ref} . Предлагаемый регулятор имеет вид

$$\begin{aligned} v_x(f) &= V_{x_ref} (1 - |e(f)|); \\ v_y(f) &= V_{y_max} e(f), \end{aligned} \quad (2)$$

где V_{x_ref} – уставка по скорости вдоль оси абсцисс; V_{y_max} – максимальная скорость движения вдоль оси ординат (насыщение); $e(f)$ – относительная ошибка от уставки по силе F_{ref} , которая имеет вид

$$e(f) = \begin{cases} \frac{F_{ref} - f}{F_{ref}}, & 0 \leq f < 2F_{ref} \\ -1, & f \geq 2F_{ref} \end{cases} \quad (3)$$

Покажем, что система (1) с законом управления (2) является устойчивой в малой окрестности положения равновесия. Так как контакт происходит вдоль оси ординат, то убывание от-

носителем ошибки $e(f)$ полностью зависит от второго уравнения в (1). Поэтому доказательство устойчивости будет состоять из двух частей: сначала будет показана устойчивость движения по оси ординат (стремление $e(f) \rightarrow 0$, что выполняется при $f \rightarrow F_{ref}$), а затем на основе этого покажем достижение цели управления по оси абсцисс $\dot{x} \rightarrow V_{x_ref}$.

Для доказательства устойчивости необходимо задаться моделью упругости материала поверхности. В качестве такой модели хорошо подходит модель вязкоупругого тела Кельвина – Фойгта (рис. 2). Уравнения, описывающие модель Кельвина – Фойгта:

$$f = ky + \gamma \dot{y}, \quad (4)$$

где k, γ – коэффициенты жесткости и затухания соответственно.

1. Покажем устойчивость движения по оси ординат.

Подставим явно выражения для регулятора (2) во второе уравнение (1) и учтем модель вязкоупругого тела (4); перегруппировав члены, получим

$$F_{ref} T_y / V_{y_max} \ddot{y} + (F_{ref} / V_{y_max} + \gamma) \dot{y} + ky = F_{ref}. \quad (5)$$

Найдем положение равновесия системы, положив $\dot{y} = 0, \ddot{y} = 0$:

$$y_0 = F_{ref} / k. \quad (6)$$

Сделаем замену переменных в (5), переобозначив $y \leftarrow y - y_0$, тогда уравнение (5) примет однородный вид, его характеристический полином примет форму

$$F_{ref} T_y / V_{y_max} s^2 + (F_{ref} / V_{y_max} + \gamma) s + k = 0. \quad (7)$$

В соответствии с теоремой Рауса – Гурвица необходимым и достаточным условием устойчивости положения равновесия является положительность всех коэффициентов в полиноме (7). Данное условие выполняется при истинности следующих неравенств, которые всегда выполняются ввиду положительности всех входящих в них коэффициентов:

$$F_{ref} T_y / V_{y_max} > 0, F_{ref} / V_{y_max} + \gamma > 0, k > 0. \quad (8)$$

Таким образом, устойчивость движения по оси ординат доказана.

2. Покажем выполнение цели управления $\dot{x} \rightarrow V_{x_ref}$ по оси абсцисс.

Из предыдущих рассуждений следует, что относительная ошибка убывает асимптотически $e(f) \rightarrow 0$ и абсолютно интегрируема на интервале $[0, +\infty)$ ввиду устойчивости системы. Поведение этой ошибки будет различным для разных моделей упругого тела, поэтому положим для общности, что $e(f)$ – это некоторая абсолютно интегрируемая функция на интервале $[0, +\infty)$, такая, что $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Запишем первое уравнение в (1) с использованием явного выражения для регулятора (2) и введенной функции $\varepsilon(t)$

$$T_x \dot{v}_x + v_x = V_{x_ref} (1 - \varepsilon(t)). \quad (9)$$

Чтобы найти асимптотическое поведение v_x , воспользуемся теоремой о конечном значении из теории операционного исчисления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad (10)$$

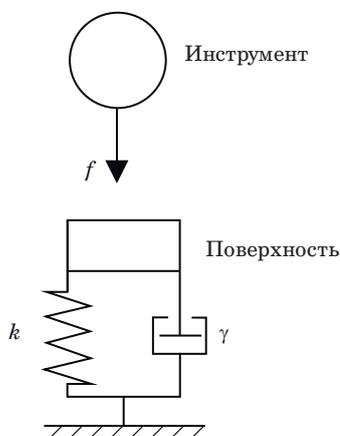
где $F(s)$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$.

В соответствии с теоремой о конечном значении (10) для преобразования Лапласа от ошибки $L[\varepsilon(t)](s) = E(s)$ будет выполняться $\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$. Сделаем преобразование Лапласа уравнения (9), полагая начальное значение для скорости равным нулю: $v_x(0) = 0$, и найдем предел в соответствии с (10):

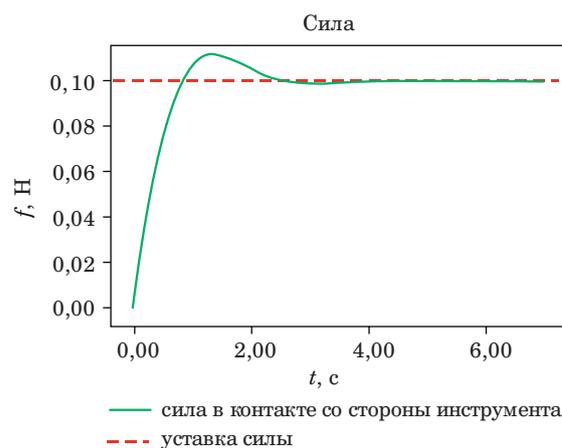
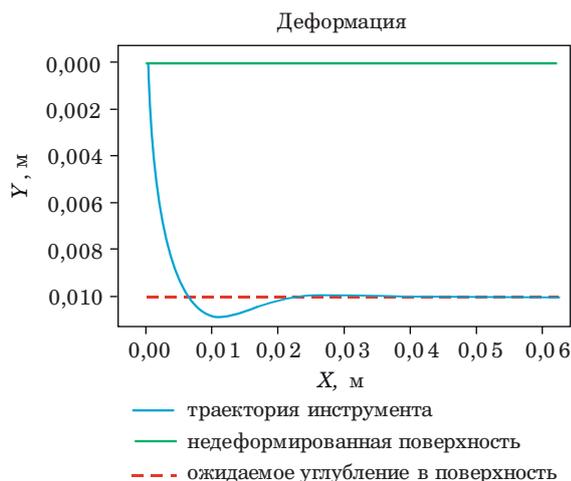
$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + T_x s} V_{x_ref} (1/s - E(s)) = V_{x_ref}. \quad (11)$$

Таким образом, скорость асимптотически достигает необходимого значения, что и требовалось доказать.

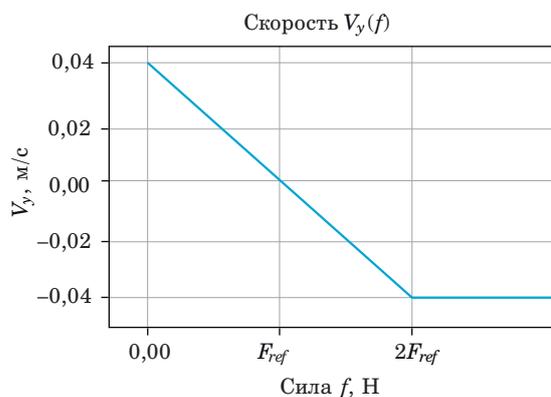
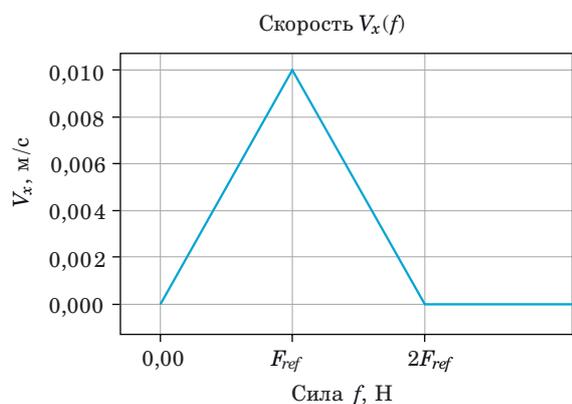
Результаты моделирования предложенного регулятора с моделью вязкоупругого тела Кель-



■ **Рис. 2.** Модель Кельвина – Фойгта
 ■ **Fig. 2.** Kelvin – Voigt model



■ **Рис. 3.** Переходный процесс регулятора для деформации и силы
 ■ **Fig. 3.** Transient process of the controller for displacement and force



■ **Рис. 4.** Визуализация закона управления
 ■ **Fig. 4.** Control law visualization

вина – Фойгта для параметров $T_x = 0,3$, $T_y = 0,8$, $F_{ref} = 0,1$, $V_{x_ref} = 0,01$, $V_{y_max} = 0,04$, $\gamma = 3$, $k = 10$ показаны на рис. 3.

Визуализация закона управления (2) для приведенных выше значений параметров представлена на рис. 4.

Техническое и программное обеспечение

В качестве ультразвукового датчика был использован портативный ультразвуковой сканер (рис. 5) фирмы TELEMED LogicScan 128 EXT-1Z Kit (Telemed Ultrasound, <https://www.telemedultrasound.com/en/home>).

Манипулятор оснащен шестисосным датчиком силы фирмы Sunrise Instruments. Датчик силы измеряет силы и моменты, действующие на него со стороны внешних тел в его системе координат (рис. 6).



■ **Рис. 5.** Портативный ультразвуковой датчик LogicScan128 EXT-1Z KIT
 ■ **Fig. 5.** PC-based ultrasound imaging system Logic Scan128 EXT-1Z KIT



■ **Рис. 6.** Система координат датчика силы
 ■ **Fig. 6.** Force sensor frame

Для теста прототипа был изготовлен манекен на основе желатина с помещенной в объем пирамидой размером $20 \times 30 \times 50$ мм. Экспериментальная установка с закрепленным ультразвуковым датчиком представлена на рис. 7.

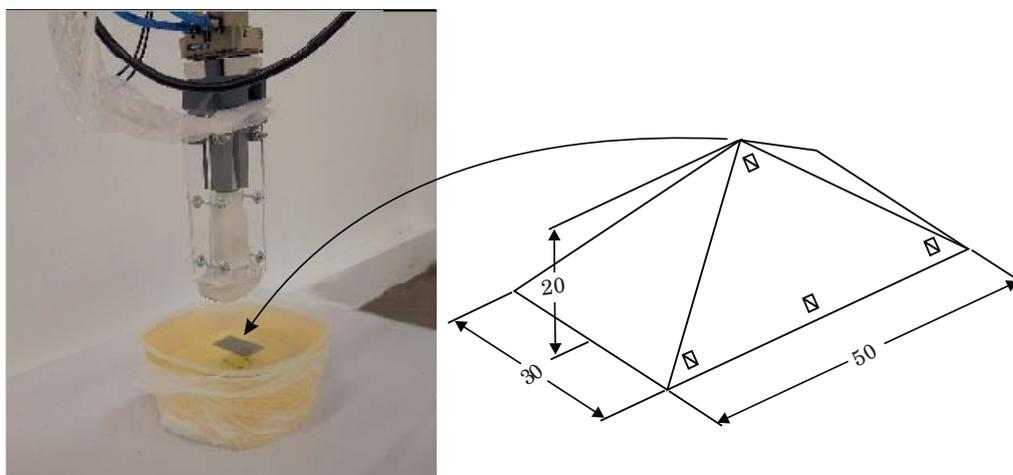
Для работы с ультразвуковыми снимками, 3D-реконструкции и рендеринга использовалась программа 3D Slicer (3D Slicer, <https://www.slicer.org>).

Апробация прототипа проводилась на шестизвенном промышленном манипуляторе фирмы ABB IRB 1600 грузоподъемностью 10 кг и максимальным выносом 1,45 м. Манипуляторы ABB поставляются с двумя различными интерфейсами коммуникации с контроллером робота. Первый интерфейс коммуникации, который в подавляющем большинстве случаев используется в роботизированных производствах, заключается в программировании команд на про-

приетарном языке RAPID (Technical reference manual – RAPID overview, <https://library.abb.com/d/3HAC050947-001>). В функционал данного языка входит также поддержка библиотеки для работы с датчиком силы Force Control. Второй интерфейс коммуникации с контроллером Externally Guided Motion (EGM) (Application manual – Externally Guided Motion RW6, <https://library.abb.com/d/3HAC073319-001>) предоставляет низкоуровневый доступ к управлению по скоростям и положениям. Данный интерфейс не имеет своих планировщиков и генераторов движения, и пользователь должен самостоятельно их разрабатывать на языках высокого уровня, например C++ или C#. Наибольшее распространение низкоуровневый интерфейс получил в научно-исследовательской деятельности для отработки и прототипирования новых робототехнических приложений [14]. В настоящей работе регулятор реализован на интерфейсе EGM, чем обеспечивается масштабируемость разработанного решения на линейки роботов других производителей с интерфейсом управления по скорости.

Трехмерная ультразвуковая реконструкция

Ультразвуковые снимки в В-режиме представляют собой двухмерные сечения объекта, находящегося внутри живых тканей: органа, опухоли, кости и т. п. В медицинской технике применяют трехмерные ультразвуковые датчики, различные механические приспособления для сканирования по заданному паттерну (рис. 8) с регистрацией ориентаций и положения ультразвукового датчика для последующей трехмерной реконструкции.



■ **Рис. 7.** Экспериментальная установка и пирамида для трехмерной реконструкции
 ■ **Fig. 7.** Experimental setup and the pyramid for 3D reconstruction

Автоматизация ультразвуковой диагностики с помощью манипулятора представляет интерес сама по себе, и уже существуют подобные прототипы и даже коммерческие решения. Все подобные решения так или иначе имеют механическую систему, осуществляющую движение ультразвукового датчика: это может быть как промышленный манипулятор, так и манипулятор специальной конструкции. В любом таком решении обязательно требуется система слежения за положением ультразвукового датчика, поэтому в настоящей работе для трехмерной реконструкции предлагается использовать показания энкодеров манипулятора.

Основная идея предлагаемого подхода — имитировать вышеуказанные механические приспособления слежения. В данной работе реализовано два конкретных паттерна: линейное и вращательное сканирование (см. рис. 8). Стоит заметить, что степени свободы манипулятора позволяют реализовать паттерны сканирования

и более сложной формы, если это необходимо для конкретной диагностики.

Реализация эксперимента

1. Сканирование фантома

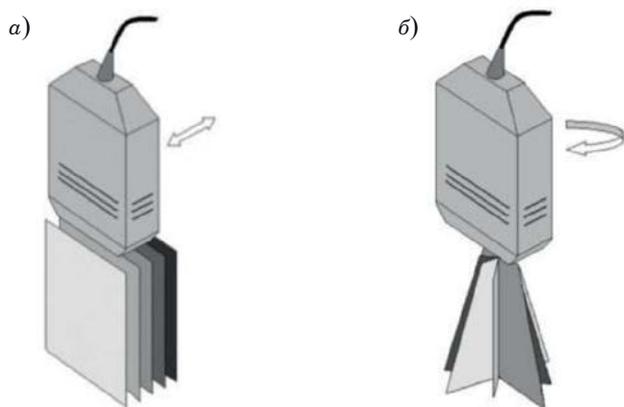
Осуществляется сбор ультразвуковых снимков по линейному и вращательному паттернам сканирования. Движение манипулятора контролируется регулятором (2) для линейного паттерна движения, а вращательный паттерн осуществляется просто вращением последнего звена манипулятора. В обоих экспериментах количество полученных снимков порядка сотни, снимки, отражающие характерную геометрию сечений пирамиды для линейного и вращательного паттерна сканирования, представлены на рис. 9, а и б.

2. Обработка полученных снимков

Ультразвуковые снимки проходят предварительную фильтрацию от шумов стандартными методами обработки изображений, если необходимо, проводится улучшение контраста, и затем в программе 3D Slicer выбирается интересующая нас область (Region of Interest, ROI) для трехмерной реконструкции (рис. 10). Выбор области позволяет снизить вычислительную сложность алгоритма шагающих кубов (The Marching Cubes Algorithm), а также избавиться от артефактов, вызванных оставшимися шумами за пределами области объекта, который подлежит реконструкции.

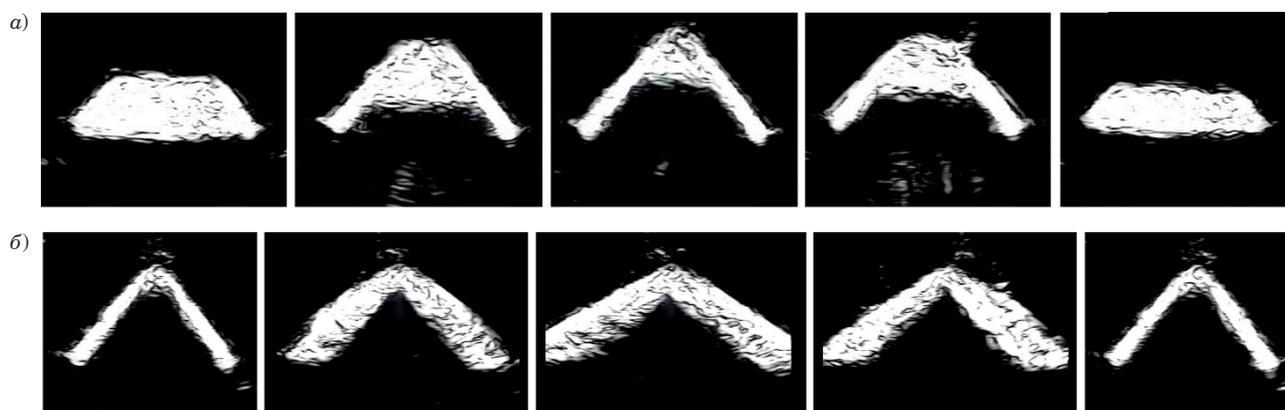
3. Трехмерная реконструкция

Для 3D-реконструкции в программе 3D Slicer реализован алгоритм шагающих кубов [15]. Трехмерные области интереса (параллелепипеды) с реконструированным объемом из соответствующих двумерных снимков для линейного и вращательного паттернов движения представлены на рис. 11, а и б.



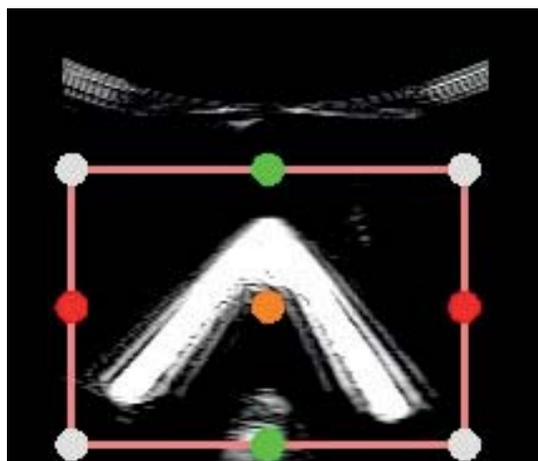
■ **Рис. 8.** Линейный (а) и вращательный (б) паттерны сканирования

■ **Fig. 8.** Linear (а) and rotational (б) scan pattern



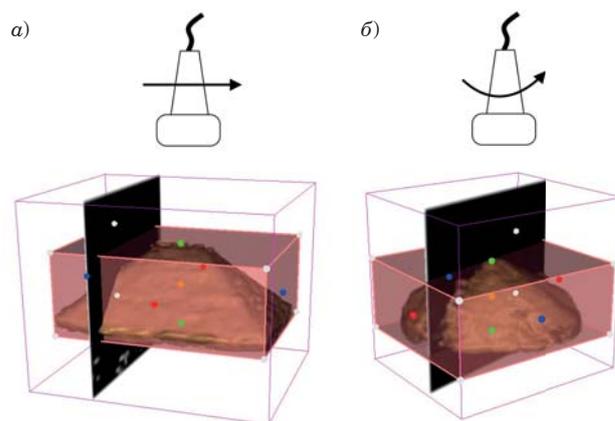
■ **Рис. 9.** Ультразвуковые снимки при линейном (а) и вращательном (б) сканировании

■ **Fig. 9.** Ultrasound frames from linear (а) and rotational (б) scanning pattern



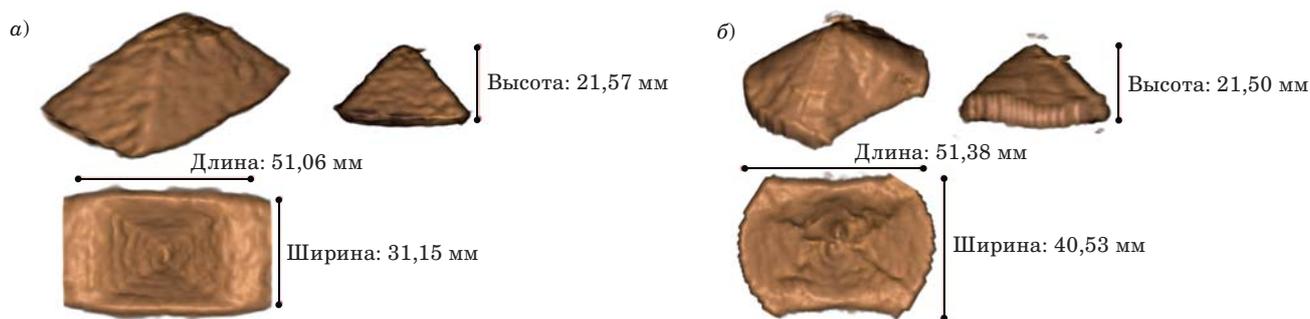
■ **Рис. 10.** Пример области интереса для реконструкции

■ **Fig. 10.** ROI for 3D reconstruction



■ **Рис. 11.** Области интереса и реконструированные объемы для линейного (а) и вращательного (б) паттерна сканирования

■ **Fig. 11.** ROI and reconstructed volumes from linear (а) and rotational (б) scanning patterns



■ **Рис. 12.** Реконструированный объем для линейного (а) и вращательного (б) паттерна сканирования

■ **Fig. 12.** Reconstructed volume from linear (а) and rotational (б) scanning pattern

4. Измерения реконструированных объемов

В медицинской практике часто возникает необходимость получить метрические характеристики очага заболевания или патологии, линейные размеры позволяют также верифицировать адекватность проведенного эксперимента по трехмерной реконструкции. Результаты реконструкции с измерениями линейных размеров для обоих паттернов движения представлены на рис. 12, а и б. Линейные размеры согласуются с размерами пирамиды $20 \times 30 \times 50$ мм (см. рис. 7), но следует заметить, что использовался некалиброванный ультразвуковой датчик, поэтому нет возможности построить доверительные интервалы для измеренных значений. Калибровка ультразвукового датчика — отдельная сложная задача [16], требующая специального оборудования, но благодаря ей можно проводить метрические измерения повышенной точности.

Заключение

В данной работе был разработан прототип робототехнической системы для автоматизации ультразвуковой диагностики. Главным элементом данной системы является предложенный силомоментный регулятор, который может быть использован на любых манипуляторах, управляемых по скорости. Алгоритмы управления были отработаны в эксперименте по трехмерной реконструкции объекта по двумерным ультразвуковым снимкам в В-режиме. Результаты экспериментальной проверки показали удовлетворительное восстановление трехмерной формы при использовании некалиброванного ультразвукового датчика. План дальнейших исследований предполагает улучшение прототипа по разным направлениям: будет исследована возможность применения калиброванного ультразвукового датчика для повышения точности; модифицирован силомоментный регулятор

для возможности сканирования искривленных поверхностей; проведено внедрение сегментатора на основе искусственного интеллекта для лучшего отделения объекта, подлежащего трехмерной реконструкции, от фона, что должно повысить качество результирующего трехмерного объема.

Финансовая поддержка

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-79-10213,

<https://www.rscf.ru/project/23-79-10213/> (Разработка силомоментного регулятора в режиме управления по скорости) и в рамках реализации государственной программы федеральной территории «Сириус» «Научно-технологическое развитие федеральной территории «Сириус». Соглашение № 18-03 от 10 сентября 2024 г. (Методика получения данных с помощью ультразвукового датчика, трехмерная реконструкция объекта по двумерным ультразвуковым снимкам, методика сканирования искривленных поверхностей).

Литература

- Peters B. S., Armijo P. R., Krause C., Choudhury S. A., Oleynikov D.** Review of emerging surgical robotic technology. *Surg Endosc*, 2018, vol. 32, no. 4, pp. 1636–1655. doi:10.1007/s00464-018-6079-2
- Han J., Davids J., Ashrafian H., Darzi A., Elson D. S., Sodergren M.** A systematic review of robotic surgery: From supervised paradigms to fully autonomous robotic approaches. *Int J Med Robot*, 2022, vol. 18, no. 2, Article e2358. doi:10.1002/rcs.2358
- Hogan N.** Contact and physical interaction. *Annual Review of Control, Robotics & Autonomous Systems*, 2022, vol. 5, pp. 179–203. doi:10.1146/annurev-control-042920-010933
- Vukobratovic M., Tuneski A.** Contact control concepts in manipulation robotics/spl minus/an overview. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 41, no. 1, pp. 12–24. doi:10.1109/41.281603
- Bicchi A., Kumar V.** Robotic grasping and contact: A review. *Proceedings 2000 ICRA, USA*, 2000, vol. 1, pp. 348–353. doi:10.1109/ROBOT.2000.844081
- Chatterjee S., Das S., Ganguly K.** Advancements in robotic surgery: Innovations, challenges and future prospects. *Robotic Surgery*, 2024, vol. 18, no. 1, Article 28. doi:10.1007/s11701-023-01801-w
- Garcia-Gonzalez A., Fuentes-Aguilar R. Q., Salgado I.** A review on the application of autonomous and intelligent robotic devices in medical rehabilitation. *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2022, vol. 44, Article 393. doi:10.1007/s40430-022-03692-8
- Лебедев Г. С., Шадеркин И. А., Шадеркина А. И.** Роботы УЗИ: готовые решения и перспективные направления. *Российский журнал телемедицины и электронного здравоохранения*, 2022, т. 8, № 2, с. 21–41. doi:10.29188/2712-9217-2022-8-2-21-41, EDN: ZQTPPF
- Mehrdad S., Liu F., Pham M. T., Lelevé A., Atashzar S. F.** Review of advanced medical telerobots. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, no. 1, Article 209. doi:10.3390/app11010209
- Ohnishi K., Shimono T., Natori K.** Haptics for medical applications. *Artif Life Robotics*, 2009, vol. 13, pp. 383–389. doi:10.1007/s10015-008-0624-3
- Carovac A., Smajlovic F., Junuzovic D.** Application of ultrasound in medicine. *Acta Inform Med*, 2011, vol. 19, no. 3, pp. 168–171. doi:10.5455/aim.2011.19.168-171
- Mohamed F., Vei Siang C.** Artificial Intelligence – Applications in Medicine and Biology. *A Survey on 3D Ultrasound Reconstruction Techniques*. Edited by M. A. Aceves-Fernandez, 2019. doi:10.5772/intechopen.81628
- Lindseth F., Tangen G., Langø T., Bang J.** Probe calibration for freehand 3D ultrasound. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 2003, vol. 29, no. 11, pp. 1607–1623. doi:10.1016/s0301-5629(03)01012-3
- Соколов В. С., Кульминский Д. Д.** Прототип робастной системы сборки резьбового соединения на базе робота-манипулятора методами силомоментного управления. *Робототехника и техническая кибернетика*, 2024, т. 12, № 4, с. 296–304. doi:10.31776/RTCJ.12407
- Timothy S. N., Hong Yi.** A survey of the marching cubes algorithm. *Computers & Graphics*, 2006, vol. 30, no. 5, pp. 854–879. doi:10.1016/j.cag.2006.07.021
- Hsu P. W., Prager R. W., Gee A. H., Treece G. M.** *Freehand 3D Ultrasound Calibration: A Review. Advanced Imaging in Biology and Medicine*. Sencen C. W., Hallgrímsson B. (eds). Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, pp. 47–84. doi:10.1007/978-3-540-68993-5_3

UDC 007.52:681.518.5

doi:10.31799/1684-8853-2025-1-51-59

EDN: LAXRPC

Robotic system for three-dimensional ultrasound reconstruction based on force-torque controlV. S. Sokolov^a, Post-Graduate Student, Junior Researcher, orcid.org/0009-0006-8695-843XD. D. Kulminskiy^a, PhD, Phys.-Math., Associate Professor, orcid.org/0000-0002-3936-2813, kulminskiy.dd@talantiuspeh.ru^aSirius University, 1, Olimpiyskiy Av., 354340, Krasnodar region, federal territory «Sirius», p.g.t. Sirius, Russian Federation**Introduction:** Ultrasound diagnostics is one of the most commonly used examination methods in medicine. Automation of this procedure will reduce the workload on medical personnel and provide access to medical care in remote areas and during emergencies.**Purpose:** To develop a prototype robotic system for conducting three-dimensional reconstruction of an object from a set of two-dimensional ultrasound images in B-mode obtained using linear and rotational scanning patterns. **Results:** A system integration of the industrial manipulator and the portable ultrasonic device was accomplished; an experimental verification of the system was conducted on an artificial phantom. Contact with the surface is maintained using the proposed force-torque controller. An experimental verification of the system was conducted on a gelatin dummy to restore the shape of a three-dimensional object based on two-dimensional images, with the position and orientation of each image calculated using the built-in encoders of the manipulator. In addition to two-dimensional images, three-dimensional visualization of the examined region can be beneficial for more accurate diagnosis. **Practical relevance:** The proposed method for obtaining a three-dimensional visualization of the examined area may be useful in certain cases of clinical practice for more accurate diagnosis. The proposed approaches are not tied to proprietary algorithms of specific manufacturers and can be transferred to any manipulators equipped with joint speed control and force sensors. **Discussion:** Improvements to the prototype include the use of a calibrated ultrasonic sensor, modifications to the force-torque controller for scanning curved surfaces, and the introduction of a machine learning-based segmenter to separate an object from the background.**Keywords** – prototype robotic system, automation of the diagnostic process, ultrasound scanning, industrial manipulator, force sensor, force-torque control, force-torque sense, contact model, 3D reconstruction of objects from an image, ultrasound images.**For citation:** Sokolov V. S., Kulminskiy D. D. Robotic system for three-dimensional ultrasound reconstruction based on force-torque control. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* [Information and Control Systems], 2025, no. 1, pp. 51–59 (In Russian). doi:10.31799/1684-8853-2025-1-51-59, EDN: LAXRPC**Financial support**The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 23-79-10213, <https://www.rscf.ru/project/23-79-10213/> (Development of a force-torque controller in speed control mode) and by the grant of the state program of the “Sirius” Federal Territory “Scientific and technological development of the “Sirius” Federal Territory”. Agreements No. 18-03 dated September 10, 2024. (Methodology for obtaining data using an ultrasonic sensor, three-dimensional reconstruction of an object based on two-dimensional ultrasound images, method for scanning curved surfaces).**References**

- Peters B. S., Armijo P. R., Krause C., Choudhury S. A., Olevnikov D. Review of emerging surgical robotic technology. *Surg Endosc*, 2018, vol. 32, no. 4, pp. 1636–1655. doi:10.1007/s00464-018-6079-2
- Han J., Davids J., Ashrafi H., Darzi A., Elson D. S., Sodergren M. A systematic review of robotic surgery: From supervised paradigms to fully autonomous robotic approaches. *Int J Med Robot*, 2022, vol. 18, no. 2, Article e2358. doi:10.1002/rcs.2358
- Hogan N. Contact and physical interaction. *Annual Review of Control, Robotics & Autonomous Systems*, 2022, vol. 5, pp. 179–203. doi:10.1146/annurev-control-042920-010933
- Vukobratovic M., Tuneski A. Contact control concepts in manipulation robotics/spl minus/an overview. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 41, no. 1, pp. 12–24. doi:10.1109/41.281603
- Bicchi A., Kumar V. Robotic grasping and contact: A review. *Proceedings 2000 ICRA, USA, 2000*, vol. 1, pp. 348–353. doi:10.1109/ROBOT.2000.844081
- Chatterjee S., Das S., Ganguly K. Advancements in robotic surgery: Innovations, challenges and future prospects. *Robotic Surgery*, 2024, vol. 18, no. 1, Article 28. doi:10.1007/s11701-023-01801-w
- Garcia-Gonzalez A., Fuentes-Aguilar R. Q., Salgado I. A review on the application of autonomous and intelligent robotic devices in medical rehabilitation. *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, 2022, vol. 44, Article 393. doi:10.1007/s40430-022-03692-8
- Lebedev G. S., Shaderkin I. A., Shaderkina A. I. Ultrasound robots: Ready-to-use solutions and perspective directions. *Russian Journal of Telemedicine and E-Health*, 2022, vol. 8, no. 2, pp. 21–44 (In Russian). doi:10.29188/2712-9217-2022-8-2-21-41, EDN: ZQTPPF
- Mehrdad S., Liu F., Pham M. T., Lelevé A., Atashzar S. F. Review of advanced medical telerobots. *Applied Sciences*, 2021, vol. 11, no. 1, Article 209. doi:10.3390/app11010209
- Ohnishi K., Shimono T., Natori K. Haptics for medical applications. *Artif Life Robotics*, 2009, vol. 13, pp. 383–389. doi:10.1007/s10015-008-0624-3
- Carovac A., Smajlovic F., Junuzovic D. Application of ultrasound in medicine. *Acta Inform Med*, 2011, vol. 19, no. 3, pp. 168–171. doi:10.5455/aim.2011.19.168-171
- Mohamed F., Vei Siang C. *Artificial Intelligence – Applications in Medicine and Biology*. In: *A Survey on 3D Ultrasound Reconstruction Techniques*. Edited by M. A. Aceves-Fernandez, 2019. doi:10.5772/intechopen.81628
- Lindseth F., Tangen G., Langø T., Bang J. Probe calibration for freehand 3D ultrasound. *Ultrasound in Medicine & Biology*, 2003, vol. 29, no. 11, pp. 1607–1623. doi:10.1016/s0301-5629(03)01012-3
- Sokolov V. S., Kulminskiy D. D. Prototype of a robust screw-thread assembly system based on industrial manipulator using force-torque control methods. *Robotics and Technical Cybernetics*, 2024, vol. 15, no. 4, pp. 296–304 (In Russian). doi:10.31776/RTCJ.12407
- Timothy S. N., Hong Yi. A survey of the marching cubes algorithm. *Computers & Graphics*, 2006, vol. 30, no. 5, pp. 854–879. doi:10.1016/j.cag.2006.07.021
- Hsu P. W., Prager R. W., Gee A. H., Treece G. M. *Freehand 3D Ultrasound Calibration: A Review*. In: *Advanced Imaging in Biology and Medicine*. Sensen C. W., Hallgrímsson B. (eds). Springer, Berlin, Heidelberg, 2009, pp. 47–84. doi:10.1007/978-3-540-68993-5_3

ВЕРЕСОВА
Алина
Максимовна



Аспирант, ассистент кафедры инфокоммуникационных технологий и систем связи Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

В 2021 году окончила Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения по специальности «Информационная безопасность».

Является автором 19 научных публикаций.

Область научных интересов – теория информации, теория кодирования, низкоплотностные коды, каналы с памятью.

Эл. адрес:

amveresova@gmail.com

ВОДНЕВ
Александр
Андреевич



Аспирант Московского института электроники и математики им. А. Н. Тихонова, Высшая школа экономики.

В 2021 году окончил Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» по специальности «Прикладная математика».

Область научных интересов – криптография и компьютерная безопасность, помехоустойчивое кодирование.

Эл. адрес: avodnev@hse.ru

ГРИГОРЬЕВ
Евгений
Константинович



Старший преподаватель кафедры вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

В 2019 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения по специальности «Электроника и нанoeлектроника».

Является автором 15 научных публикаций и четырех патентов на изобретение.

Область научных интересов – численные методы, теория матриц, ортогональные преобразования.

Эл. адрес: evgr.asp@yandex.ru

КИСЕЛЕВ
Алексей
Васильевич



Доктор технических наук, профессор кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств, руководитель Центра радиотехнических устройств Новосибирского государственного технического университета.

В 1980 году окончил Новосибирский электротехнический институт по специальности «Радиотехника».

В 1998 году защитил диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук.

Является автором более 200 научных публикаций и 20 патентов на изобретения.

Область научных интересов – имитационное моделирование сложной радиоэлектронной обстановки, радиолокация, радиосвязь.

Эл. адрес: a.kiselev@corp.nstu.ru

КУЛЬМИНСКИЙ
Данил
Дмитриевич



Доцент Научно-технологического университета «Сириус».

В 2014 году окончил Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского по специальности «Методы и устройства обработки сигналов и данных».

В 2018 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Является автором более 50 научных публикаций.

Область научных интересов – робототехника, нелинейная динамика, анализ временных рядов, разработка систем автоматического управления и контроля на базе программируемых микроконтроллеров и промышленных роботов-манипуляторов.

Эл. адрес:

kulminskiy.dd@talantiuspeh.ru

МОТЫКО
Александр
Александрович



Доцент кафедры телевидения и видеотехники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ».

В 2008 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения по специальности «Аудиовизуальная техника».

В 2012 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук.

Является автором 80 научных публикаций.

Область научных интересов – цифровая обработка изображений, машинное обучение, колориметрия, видеоаналитика.

Эл. адрес: aamotyko@etu.ru

ОБУХОВА
Наталья
Александровна



Доцент, декан факультета радиотехники и телекоммуникаций, заведующая кафедрой телевидения и видеотехники Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ».

В 1991 году окончила Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) по специальности «Системы автоматизированного проектирования».

В 2009 году защитила диссертацию на соискание ученой степени доктора технических наук.

Является автором 130 научных публикаций.

Область научных интересов – цифровая обработка изображений, машинное обучение, колориметрия, видеоаналитика.

Эл. адрес: naobukhova@etu.ru

СЕРГЕЕВ
Александр
Михайлович



Доцент кафедры вычислительных систем и сетей Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

В 2004 году окончил Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения по специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети».

В 2020 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата технических наук. Является автором более 100 научных публикаций и одного патента на изобретение.

Область научных интересов – численные методы, теория вычислительных процессов, проектирование специализированных процессоров.

Эл. адрес: asklab@mail.ru

СОКОЛОВ
Виктор
Сергеевич



Младший научный сотрудник, аспирант Научно-технологического университета «Сириус».

В 2018 году окончил бакалавриат Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого по направлению «Физика конденсированного состояния», в 2020 году – магистратуру Академического университета им. Ж. И. Алферова по направлению «Теоретическая физика».

Является автором одной научной публикации.

Область научных интересов – робототехника, компьютерное зрение, машинное обучение, теория управления.

Эл. адрес: sok92@mail.ru

ТАЮРОВ
Антон
Викторович



Аспирант кафедры радиоприемных и радиопередающих устройств, инженер-электроник Центра радиотехнических устройств Новосибирского государственного технического университета.

В 2021 году окончил Новосибирский государственный технический университет по специальности «Радиотехника».

Является автором 11 научных публикаций.

Область научных интересов – радиолокация, радиосвязь, имитационное моделирование радиолокационной обстановки.

Эл. адрес: ya.antoha@gmail.com

ЯКУБОВИЧ
Юрий
Владимирович



Доцент кафедры теории вероятностей Санкт-Петербургского государственного университета.

В 1994 году окончил математико-механический факультет Санкт-Петербургского государственного университета по специальности «Прикладная математика».

В 2000 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

Является автором 40 научных публикаций.

Область научных интересов – вероятностные подходы к комбинаторике.

Эл. адрес: yuyakub@gmail.com

Уважаемые авторы!

При подготовке рукописей статей необходимо руководствоваться следующими рекомендациями.

Статьи должны содержать изложение новых научных результатов. Название статьи должно быть кратким, но информативным. В названии недопустимо использование сокращений, кроме самых общепринятых (РАН, РФ, САПР и т. п.).

Текст рукописи должен быть оригинальным, а цитирование и самоцитирование корректно оформлено.

Объем статьи (текст, таблицы, иллюстрации и библиография) не должен превышать эквивалента в 20 страниц, напечатанных на бумаге формата А4 на одной стороне через 1,5 интервала Word шрифтом Times New Roman размером 13, поля не менее двух сантиметров.

Обязательными элементами оформления статьи являются: индекс УДК, заглавие, инициалы и фамилия автора (авторов), ученая степень, звание (при отсутствии – должность), полное название организации, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках, ORCID и электронный адрес одного из авторов. При написании аннотации не используйте аббревиатур и не делайте ссылок на источники в списке литературы. Предоставляйте подрисуночные подписи и названия таблиц на русском и английском языках.

Статьи авторов, не имеющих ученой степени, рекомендуется публиковать в соавторстве с научным руководителем, наличие подписи научного руководителя на рукописи обязательно; в случае самостоятельной публикации обязательно предоставляйте заверенную по месту работы рекомендацию научного руководителя с указанием его фамилии, имени, отчества, места работы, должности, ученого звания, ученой степени.

Простые **формулы** набирайте в Word, сложные с помощью редактора MathType или Equation. Для набора одной формулы не используйте два редактора; при наборе формул в формульном редакторе знаки препинания, ограничивающие формулу, набирайте вместе с формулой; для установки размера шрифта в MathType никогда не пользуйтесь вкладкой Other, Smaller, Larger, используйте заводские установки редактора, не подгоняйте размер символов в формулах под размер шрифта в тексте статьи, не растягивайте и не сжимайте мышью формулы, вставленные в текст; пробелы в формуле ставьте только после запятой при перечислении с помощью Ctrl+Shift+Space (пробел); не отделяйте пробелами знаки: + = – ×, а также пространство внутри скобок; для выделения греческих символов в MathType полужирным начертанием используйте Style → Other → bold.

Для набора формул в Word никогда не используйте вкладки: «Уравнение», «Конструктор», «Формула» (на верхней панели: «Вставка» – «Уравнение»), так как этот ресурс предназначен только для внутреннего использования в Word и не поддерживается программами, предназначенными для изготовления оригинал-макета журнала.

При наборе символов в тексте помните, что символы, обозначаемые латинскими буквами, набираются светлым курсивом, русскими и греческими – светлым прямым, векторы и матрицы – прямым полужирным шрифтом.

Подробнее см. <http://i-us.ru/index.php/ius/author-guide>

Иллюстрации:

– рисунки, графики, диаграммы, блок-схемы предоставляйте в виде отдельных исходных файлов, поддающихся редактированию, используя векторные программы: Visio (*.vsd, *.vsdx); Adobe Illustrator (*.ai); Coreldraw (*.cdr, версия не выше 15); Excel (*.xls); Word (*.docx); AutoCad, Matlab (экспорт в PDF, EPS, SVG, WMF, EMF); Компас (экспорт в PDF); веб-портал DRAW.IO (экспорт в PDF); Inkscape (экспорт в PDF);

– фото и растровые – в формате *.tif, *.png с максимальным разрешением (не менее 300 pixels/inch).

Наличие подрисуночных подписей и названий таблиц на русском и английском языках обязательно (желательно не повторяющих дословно комментарии к рисункам в тексте статьи).

В редакцию предоставляются:

– сведения об авторе (фамилия, имя, отчество, место работы, должность, ученое звание, учебное заведение и год его окончания, ученая степень и год защиты диссертации, область научных интересов, количество научных публикаций, домашний и служебный адреса и телефоны, e-mail), фото авторов: анфас, в темной одежде на белом фоне, должны быть видны плечи и грудь, высокая степень четкости изображения без теней и отблесков на лице, фото можно представить в электронном виде в формате *.tif, *.png, *.jpg с максимальным разрешением – не менее 300 pixels/inch при минимальном размере фото 40×55 мм;

– экспертное заключение;

– экспортное заключение.

Список литературы составляется по порядку ссылок в тексте и оформляется следующим образом:

– для книг и сборников – фамилия и инициалы авторов, полное название книги (сборника), город, издательство, год, общее количество страниц, doi;

– для журнальных статей – фамилия и инициалы авторов, полное название статьи, название журнала, год издания, номер журнала, номера страниц, doi;

– ссылки на иностранную литературу следует давать на языке оригинала без сокращений;

– при использовании web-материалов указывайте адрес сайта и дату обращения.

Список литературы оформляйте двумя отдельными блоками по образцам lit.dot на сайте журнала (<http://i-us.ru/paperrules>): Литература и References.

Более подробно правила подготовки текста с образцами изложены на нашем сайте в разделе «Руководство для авторов» – <http://i-us.ru/index.php/ius/author-guide>.

Контакты

Куда: 190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, ГУАП, РИЦ

Кому: Редакция журнала «Информационно-управляющие системы»

Тел.: (812) 494-70-02

Эл. почта: ius.spb@gmail.com

Сайт: www.i-us.ru